Über die Kriterien des Grössten und Kleinsten bei den Problemen der Variationsrechnung.

Von Simon Spitzer,

Assistenten und Privat-Docenten der Mathematik am k. k. polytechnischen Institute zu Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung vom 6. Mai 1854.)

Der bedeutendste Fortschritt, der in der neuern Zeit in der Variationsrechnung geschehen ist, rührt von Jacobi her. Dieser grosse Analyst ist der erste, welcher allgemeine und sichere Regeln angab, mittelst welcher man erkennen kann, ob eine Lösung eines Problems des Grössten oder Kleinsten wirklich ein Grösstes oder Kleinstes gibt, oder keines von beiden. Seine Arbeiten hierüber sind im 17. Bande von Crelle's Journal in solcher Kürze veröffentlicht, dass sie eines Commentars bedürfen, um gehörig verstanden zu werden. Einen solchen lieferte nun, vier Jahre nach der Veröffentlichung der Jacobi'schen genialen Arbeit, Delaunay im 6. Bande von Liouville's Journal, und man muss, um gerecht zu sein, gestehen, dass Delaunay's ausgezeichnete Arbeit nicht wenig zum Verständniss der Jacobi'schen beiträgt.

Ich habe versucht, auf eine andere Weise die Kriterien abzuleiten, zu denen Jacobi gelangt ist, und glaube, dass der von mir betretene Weg einige Beachtung verdiene.

§. 1.

Es sei

$$U = \int_{x_1}^{x_2} V dx, \qquad V = f(x, y, y', y'' \ldots y^{(n)})$$

es wird für y eine solche Function von x gesucht, welche U zu einem Maximum oder Minimum macht.

Denken wir uns diese Function bereits gefunden, sie sei $y = \varphi(x)$. Durch eine sehr kleine Veränderung dieser Function nehme die sie repräsentirende Curve eine andere, von der früheren sehr wenig verschiedene Gestalt an; geht nämlich y über in $y + \delta y$, wo δy eine sehr kleine von x abhängige Grösse vorstellt, so geht dadurch

$$
\begin{array}{llll}
y' & \text{über in} & \frac{\partial\,(y+\delta y)}{\partial x} & = y' + \delta y' \\
y'' & \text{„} & \text{„} \quad \frac{\partial^2(y+\delta y)}{\partial x^2} & = y'' + \delta y'' \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
y^{(n)} & \text{„} & \text{„} \quad \frac{\partial^n(y+\delta y)}{\partial x^n} & = y^{(n)} + \delta y^{(n)}
\end{array}
$$

und U in U_1, V in V_1.

Entwickelt man nun V_1 nach der Taylor'schen Reihe, so hat man

$$V_1 = V + \frac{dV}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial V}{\partial y''}\delta y'' + \dots + \frac{\partial V}{\partial y^{(n)}}\delta y^{(n)} + R$$

wo R der Kürze halber statt der Glieder der zweiten und höheren Ordnung der Taylor'schen Reihe gesetzt ist. Es ist daher:

$$U_1 = \int_{x_1}^{x_2} V dx + \int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial V}{\partial y''}\delta y'' + \dots \right.$$
$$\left. + \frac{\partial V}{\partial y^{(n)}}\delta y^{(n)}\right\} dx + \int_{x_1}^{x_2} R dx$$

oder

$$U_1 - U = \int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial V}{\partial y''}\delta y'' + \dots \right.$$
$$\left. + \frac{\partial V}{\partial y^{(n)}}\delta y^{(n)}\right\} dx + \int_{x_1}^{x_2} R dx$$

Dieser Ausdruck soll nun im Falle des Maximums stets negativ, und im Falle des Minimums stets positiv bleiben, wie immer auch δy beschaffen ist. — Denkt man sich nun statt δy, $\varepsilon\psi\,(x)$ gesetzt, unter ε eine sehr kleine Zahl verstanden, so lässt sich $U_1 - U$ folgendermassen darstellen:

$$U_1 - U = A\varepsilon + B\varepsilon^2 + C\varepsilon^3 + \dots$$

wo

$$A\,\varepsilon = \int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial V}{\partial y''}\delta y'' + \dots + \frac{\partial V}{\partial y^{(n)}}\delta y^{(n)}\right\} dx$$

ist, $B\varepsilon^2$ die Glieder der zweiten Ordnung, $C\varepsilon^3$ die Glieder der dritten Ordnung bezeichnet, u. s. f. und man hat bekanntlich für ein Maximum oder Minimum

$$A = o$$

für ein Maximum zu gleicher Zeit nach

$$B < o$$

und für ein Minimum

$$B > o$$

Wir haben also als Bedingungsgleichung für ein Maximum oder Minimum

(1) $$\int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial V}{\partial y}\,\partial y+\frac{\partial V}{\partial y'}\,\partial y'+\frac{\partial V}{\partial y''}\,\partial y''+\cdots+\frac{\partial V}{\partial y^{(n)}}\,\partial y^{(n)}\right\}dx=0$$

Behandeln wir nun nach einander die einzelnen Glieder dieses Ausdruckes nach der Methode des theilweisen Integrirens, so haben wir, von der bekannten Formel

$$\int_{x_1}^{x_2} PQ^{(n)}\,dx=\Big\{Q^{(n-1)}P-Q^{(n-2)}P'+Q^{(n-3)}P''-\,.\,.$$
$$+(-1)^{n-1}QP^{(n-1)}\Big\}_{x_1}^{x_2}+(-1)^n\int_{x_1}^{x_2} QP^{(n)}\,dx$$

Gebrauch machend:

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{dV}{\partial y}\,\partial y\quad\partial x=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial V}{\partial y}\,\partial y\;dx$$

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial V}{\partial y'}\,\partial y'\;dx=\left\{\partial y\;\frac{\partial V}{\partial y'}\right\}_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}\partial y\left[\frac{\partial V}{\partial y'}\right]'dx$$

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial V}{\partial y''}\,\partial y''\;dx=\left\{\partial y'\,\frac{\partial V}{\partial y''}-\partial y\left[\frac{\partial V}{\partial y''}\right]'\right\}_{x_1}^{x_2}+\int_{x_1}^{x_2}\partial y\left[\frac{\partial V}{\partial y''}\right]''dx$$

. . . .

. . . .

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial V}{\partial y^{(n)}}\,\partial y^{(n)}\,dx=\Big\{\;\partial y^{(n-1)}\;\frac{\partial V}{\partial y^{(n)}}-\partial y^{(n-2)}\left[\frac{\partial V}{\partial y^{(n)}}\right]'+\cdots$$
$$+(-1)^{n-1}\,\partial y\left[\frac{\partial V}{\partial y^{(n)}}\right]^{(n-1)}\Big\}_{x_1}^{x_2}+(-1)^n\int_{x_1}^{x_2}\partial y\left[\frac{\partial V}{\partial y^{(n)}}\right]^{(n)}dx$$

Werden diese Werthe in (1) substituirt, so erhält man:

$$
\begin{aligned}
&\int_{x_1}^{x_2} \partial y \left\{ \frac{\partial V}{\partial y} - \left[\frac{\partial V}{\partial y'}\right]' + \left[\frac{\partial V}{\partial y''}\right]'' - \ldots + (-1)^n \left[\frac{\partial V}{\partial y^{(n)}}\right]^{(n)} \right\} dx + \\
&\quad + \left\{ \partial y \left\{ \frac{\partial V}{\partial y'} - \left[\frac{\partial V}{\partial y''}\right]' + \left[\frac{\partial V}{\partial y'''}\right]'' - \ldots + (-1)^{n-1} \left[\frac{\partial V}{\partial y^{(n)}}\right]^{(n-1)} \right\} \right\}_{x_1}^{x_2} + \qquad (2) \\
&+ \left\{ \partial y' \left\{ \frac{\partial V}{\partial y''} - \left[\frac{\partial V}{\partial y'''}\right]' + \left[\frac{\partial V}{\partial y''''}\right]'' - \ldots + (-1)^{n-2} \left[\frac{\partial V}{\partial y^{(n)}}\right]^{(n-2)} \right\} \right\}_{x_1}^{x_2} + \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \left\{ \partial y^{(n-1)} \frac{\partial V}{\partial y^{(n)}} \right\}_{x_1}^{x_2} = 0
\end{aligned}
$$

für die Bedingungsgleichung des Grössten oder Kleinsten.

Sucht man nun aus der Differentialgleichung

$$
\frac{\partial V}{\partial y} - \left[\frac{\partial V}{\partial y'}\right]' + \left[\frac{\partial V}{\partial y''}\right]'' - \ldots + (-1)^n \left[\frac{\partial V}{\partial y^{(n)}}\right]^{(n)} = 0 \qquad (3)
$$

welche im Allgemeinen von der $2n^{\text{ten}}$ Ordnung ist, y als Function von x, setzt man dann diesen Werth von y in

$$
\begin{aligned}
&\left\{ \partial y \left\{ \frac{\partial V}{\partial y'} - \left[\frac{\partial V}{\partial y''}\right]' + \left[\frac{\partial V}{\partial y'''}\right]'' - \ldots + (-1)^{n-1} \left[\frac{\partial V}{\partial y^{(n)}}\right]^{(n-1)} \right\} \right\}_{x_1}^{x_2} + \\
&+ \left\{ \partial y' \left\{ \frac{\partial V}{\partial y''} - \left[\frac{\partial V}{\partial y'''}\right]' + \left[\frac{\partial V}{\partial y''''}\right]'' - \ldots + (-1)^{n-2} \left[\frac{\partial V}{\partial y^{(n)}}\right]^{(n-2)} \right\} \right\}_{x_1}^{x_2} + \qquad (4) \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \left\{ \partial y^{(n-1)} \frac{\partial V}{\partial y^{(n)}} \right\}_{x_1}^{x_2}
\end{aligned}
$$

und wählt man die in y auftretenden Constanten so, dass der Ausdruck (4) verschwindet, so ist der so gefundene Werth von y ein solcher, welcher die Gleichung (2) und somit auch die Gleichung (1) befriedigt. Ob aber dieses y wirklich das U zu einem Maximum oder Minimum macht, muss erst weiter untersucht werden, und diese Untersuchung bildet den Hauptgegenstand des hier vorliegenden Aufsatzes.

§. 2.

Betrachten wir nun die Glieder der zweiten Ordnung der Taylor'schen Reihe, sie sind:

$$\frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\delta y^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}\delta y'^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2}\delta y''^2 + \ldots + \frac{\partial^2 V}{\partial y^{(n)2}}\delta y^{(n)2} + \right.$$

$$\left. + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'}\delta y \delta y' + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y''}\delta y \delta y'' + \ldots + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y^{(n-1)}\partial y^{(n)}}\delta y^{(n-1)}\delta y^{(n)}\right\} dx$$

Setzt man der Kürze halber $\delta y = w$, $\delta y' = w'$, $\delta y'' = w''$, ... und $\frac{\partial^2 V}{\partial y^{(r)}\partial y^{(s)}} = (r\,s)$, wodurch also $(r\,s) = (s\,r)$ wird, so kann man die Glieder unter dem Integralzeichen so ordnen:

$$\begin{aligned}
&(0\,0)\,w\;\;w + (0\,1)\,w\;\;w' + (0\,2)\,w\;\;w'' + \ldots + (0\,n)\,w\;\;w^{(n)} + \\
+ &(1\,0)\,w'\;\;w + (1\,1)\,w'\;\;w' + (1\,2)\,w'\;\;w'' + \ldots + (1\,n)\,w'\;\;w^{(n)} + \\
+ &(2\,0)\,w''\;\;w + (2\,1)\,w''\;\;w' + (2\,2)\,w''\;\;w'' + \ldots + (2\,n)\,w''\;\;w^{(n)} + \\
+ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ &(n\,0)\,w^{(n)}w + (n\,1)\,w^{(n)}w' + (n\,2)\,w^{(n)}w'' + \ldots + (n\,n)\,w^{(n)}w^{(n)}
\end{aligned}$$

oder endlich auch so:

$$\begin{aligned}
&w\;\;[(0\,0)\,w + (0\,1)\,w' + (0\,2)\,w'' + \;\ldots\; + (0\,n)\,w^{(n)}] + \\
+ &w'\;\;[(1\,0)\,w + (1\,1)\,w' + (1\,2)\,w'' + \;\ldots\; + (1\,n)\,w^{(n)}] + \\
+ &w''\;\;[(2\,0)\,w + (2\,1)\,w' + (2\,2)\,w'' + \;\ldots\; + (2\,n)\,w^{(n)}] + \\
+ &\ldots \\
+ &w^{(n)}[(n\,0)\,w + (n\,1)\,w' + (n\,2)\,w'' + \;\ldots\; + (n\,n)\,w^{(n)}]
\end{aligned}$$

Setzt man nun wieder der Kürze wegen

$$(r\,0)\,w + (r\,1)\,w' + (r\,2)\,w'' + \;\ldots\; + (r\,n)\,w^{(n)} = M_r$$

so hat man für die Glieder der zweiten Ordnung

$$\frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}\{w\,M_0 + w'M_1 + w''M_2 + \;\ldots\; + w^{(n)}M_n\}\,dx$$

Einen ganz ähnlichen Ausdruck erhielten wir für die Glieder der ersten Ordnung, demnach hat man:

$$U_1 - U = \int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial V}{\partial y}w + \frac{\partial V}{\partial y'}w' + \frac{\partial V}{\partial y''}w'' + \;\ldots\; + \frac{\partial V}{\partial y^{(n)}}w^{(n)}\right\}dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}\{M_0\,w + M_1\,w' + M_2\,w'' + \;\ldots\; + M_n\,w^{(n)}\}\,dx + \;\ldots$$

wo in der ersten Zeile die Glieder der ersten, in der zweiten die Glieder der zweiten Ordnung stehen. Setzt man:

$$\frac{\partial V}{\partial y} w + \frac{\partial V}{\partial y'} w' + \frac{\partial V}{\partial y''} w'' + \ldots + \frac{\partial V}{\partial y^{(n)}} w^{(n)} = W$$

so ist, weil $w, w', w'' \ldots$ als reine Functionen von x vorausgesetzt sind:

$$\frac{\partial W}{\partial y} = M_0, \ \frac{\partial W}{\partial y'} = M_1, \ \frac{\partial W}{\partial y''} = M_2, \ \ldots \ \frac{\partial W}{\partial y^{(n)}} = M_n$$

und folglich

$$U_1 - U = \int_{x_1}^{x_2} W dx + \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial W}{\partial y} \delta y + \frac{\partial W}{\partial y'} \delta y' + \frac{\partial W}{\partial y''} \delta y'' + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{\partial W}{\partial y^{(n)}} \delta y^{(n)} \right\} dx + \ldots$$

oder

$$U_1 - U = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial V}{\partial y} \delta y + \frac{\partial V}{\partial y'} \delta y' + \ldots + \frac{\partial V}{\partial y^{(n)}} \delta y^{(n)} \right\} dx +$$
$$+ \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial W}{\partial y} \delta y + \frac{\partial W}{\partial y'} \delta y' + \ldots + \frac{\partial W}{\partial y^{(n)}} \delta y^{(n)} \right\} dx + \ldots$$

So wie wir nun die Glieder der ersten Ordnung mittelst des theilweisen Integrirens umwandelten, genau so lassen sich auch die Glieder der zweiten Ordnung umwandeln, man hat nämlich für dieselben:

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta y \left\{ \frac{\partial W}{\partial y} - \left[\frac{\partial W}{\partial y'}\right]' + \left[\frac{\partial W}{\partial y''}\right]'' - \ldots + (-1)^n \left[\frac{\partial W}{\partial y^{(n)}}\right]^{(n)} \right\} dx +$$
$$+ \left\{ \delta y \left\{ \frac{\partial W}{\partial y'} - \left[\frac{\partial W}{\partial y''}\right]' + \left[\frac{\partial W}{\partial y'''}\right]'' - \ldots + (-1)^{n-1} \left[\frac{\partial W}{\partial y^{(n)}}\right]^{(n-1)} \right\} \right\}_{x_1}^{x_2} +$$
$$+ \left\{ \delta y' \left\{ \frac{\partial W}{\partial y''} - \left[\frac{\partial W}{\partial y'''}\right]' + \left[\frac{\partial W}{\partial y''''}\right]'' - \ldots + (-1)^{n-2} \left[\frac{\partial W}{\partial y^{(n)}}\right]^{(n-2)} \right\} \right\}_{x_1}^{x_2} + \quad (5)$$
$$+ \ldots$$
$$+ \left\{ \delta y^{(n-1)} \frac{\partial W}{\partial y^{(n)}} \right\}_{x_1}^{x_2}$$

und dieses muss stets sein Zeichen beibehalten, wenn U ein Maximum oder Minimum sein soll.

§. 3.

Die Glieder der zweiten Ordnung lassen sich noch auf eine andere, von Legendre gezeigte Weise transformiren, wir wollen diese Transformation zuerst in dem speciellen Falle bewerkstelligen, wenn V blos eine Function ist von x, y, y'. Man setze alsdann:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} w^2 + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'} w w' + \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} w'^2 = (v w^2)' + \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} (w' + \lambda w)^2 \tag{6}$$

und bestimme λ und v so, dass dieser Gleichung identisch Genüge geschieht. Entwickelt man den zweiten Ausdruck, und ordnet ihn dann, so erhält man

$$w^2 \left[v' + \lambda^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}\right] + 2 w w' \left[v + \lambda \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}\right] + w'^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}$$

woraus man sieht, dass λ und v so gewählt werden müssen, dass folgende zwei Gleichungen stattfinden:

$$\tag{7} \begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= v' + \lambda^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'} &= v + \lambda \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} \end{aligned}$$

und diese sind hinreichend zur Bestimmung von λ und v.

Kömmt in V auch noch y'' vor, so setze man:

$$\tag{8} \begin{aligned} &\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} w^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} w'^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2} w''^2 + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'} w w' + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y''} w w'' + \\ &2 \frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y''} w' w'' = (v w^2 + 2 v_1 w w' + v_2 w'^2)' + \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2} (w + \lambda w' + \mu w)^2 \end{aligned}$$

Der zweite Theil gibt entwickelt und geordnet

$$\begin{aligned} &w^2 \left[v' + \mu^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2}\right] + w'^2 \left[2 v_1 + v_2' + \lambda^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2}\right] + w''^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2} + \\ &+ 2 w w' \left[v + v_1' + \lambda \mu \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2}\right] + 2 w w'' \left[v_1 + \mu \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2}\right] + \\ &+ 2 w' w'' \left[v_2 + \lambda \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2}\right] \end{aligned}$$

Die Gleichung (8) wird nun identisch erfüllt, wenn v, v_1, v_2, λ und μ so gewählt werden, auf dass folgende Gleichungen stattfinden

$$\tag{9} \begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= v' + \mu^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} &= 2 v_1 + v_2' + \lambda^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'} &= v + v_1' + \lambda \mu \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y''} = v_1 + \mu \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2}$$
$$\frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y''} = v_2 + \lambda \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2}$$

Kömmt in V auch noch y''' vor, so setze man:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} w^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} w'^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2} w''^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2} w'''^2 + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'} w w' + \\ &+ 2 \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y''} w w'' + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'''} w w''' + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y''} w' w'' + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y'''} w' w''' + \\ &+ 2 \frac{\partial^2 V}{\partial y'' \partial y'''} w'' w''' = (v w^2 + v_1 w'^2 + v_2 w''^2 + 2 v_3 w w' + 2 v_4 w w'' + \\ &+ 2 v_5 w' w'')' + \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2} (w''' + \lambda_1 w'' + \lambda_2 w' + \lambda_3 w)^2 \end{aligned} \tag{10}$$

der zweite Theil dieser Gleichung gibt entwickelt und geordnet:

$$\begin{aligned} &w^2 \left(v' + \lambda_3^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2}\right) + w'^2 \left(v_1' + 2 v_3 + \lambda_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2}\right) + \\ &+ w''^2 \left(v_2' + 2 v_5 + \lambda_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2}\right) + w'''^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2} + \\ &+ 2 w w' \left(v + v_3' + \lambda_2 \lambda_3 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2}\right) + 2 w w'' \left(v_3 + v_4' + \lambda_1 \lambda_3 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2}\right) + \\ &+ 2 w w''' \left(v_4 + \lambda_3 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2}\right) + 2 w' w'' \left(v_1 + v_4 + v_5' + \lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2}\right) + \\ &+ 2 w' w''' \left(v_5 + \lambda_2 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2}\right) + 2 w'' w''' \left(v_2 + \lambda_1 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2}\right) \end{aligned}$$

und folglich muss, damit die Gleichung (10) identisch stattfinde, folgendes System von Gleichungen erfüllt sein:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= v' + \lambda_3^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} &= v_1' + 2 v_3 + \lambda_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2} &= v_2' + 2 v_5 + \lambda_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'} &= v + v_3' + \lambda_2 \lambda_3 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y''} &= v_3 + v_4' + \lambda_1 \lambda_3 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'''} &= v_4 + \lambda_3 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y''} &= v_1 + v_4 + v_5' + \lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y'''} = r_5 + \lambda_2 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y'' \partial y'''} = r_2 + \lambda_1 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2}$$

Setzt man endlich ganz allgemein:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \delta y^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} \delta y'^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2} \delta y''^2 + \ldots + \frac{\partial^2 V}{\partial y^{(n)2}} \delta y^{(n)2} +$$

$$+ 2 \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'} \delta y \delta y' + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y''} \delta y \delta y'' + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y''} \delta y' \delta y'' + \ldots$$

$$+ 2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^{(n-1)} dy^{(n)}} \delta y^{(n-1)} \delta y^{(n)} =$$

$$[U_{0,0} w^2 + U_{1,1} w'^2 + U_{2,2} w''^2 + \ldots U_{n-1,n-1} w^{(n-1)2} + 2 U_{0,1} w w' +$$

$$2 U_{0,2} w w'' + 2 U_{1,2} w' w'' + \ldots + 2 U_{n-2,n-1} w^{(n-2)} w^{(n-1)}]' +$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^{(n)2}} (w^{(n)} + \lambda_1 w^{(n-1)} + \lambda_2 w^{(n-2)} + \ldots + \lambda_n w)^2$$

so gelangt man, wenn man den zweiten Theil dieser Gleichung entwickelt und ihn dem ersten identisch gleich setzt, zu einem Systeme von $\frac{n(n+3)}{2}$ Gleichungen, die hinreichen, um dieselbe Anzahl von Unbekannten, nämlich:

$$\begin{array}{llll} U_{0,0} & U_{1,1} & U_{2,2} & U_{n-1,n-1} \\ U_{0,1} & U_{0,2} & U_{1,2} & U_{n-2,n-1} \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_n \end{array}$$

zu bestimmen.

Anmerkung. Die Gleichung (6) setzt voraus, dass $\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}$ von Null verschieden ist, eben so setzt die Gleichung (8) voraus, dass $\frac{\partial^2 V}{\partial y''^2}$; die Gleichung (10) dass $\frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2}$; und die letzte Gleichung, dass $\frac{\partial^2 V}{\partial y^{(n)2}}$ von Null verschieden sind. Sind die genannten Ausdrücke aber Null, so müssen diese Gleichungen auf andere Art transformirt werden; wir werden später bei der Betrachtung der speciellen Fälle darüber ausführlich zur Sprache kommen.

§. 4.

Der Hauptzweck der ganzen hier durchzuführenden Analyse besteht aber gerade darin, diese Unbekannten zu finden. Würde man direct dieses Ziel verfolgen, so käme man zu Differentialgleichungen erster Ordnung, deren Lösung jedoch solche Schwierigkeiten darbieten, dass selbst so mächtige Geister wie Legendre, Lagrange.... diese nicht überwinden konnten. Durch eine äusserst feine und schwierige Analysis, die wir bald näher besprechen werden, gelangte Jacobi zur Integration derselben.

So ist nämlich die Differentialgleichung, welche sich aus der Elimination von λ aus den beiden Gleichungen (7) ergibt:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - v'\right) = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'} - v\right)^2$$

so sind ferner die Differentialgleichungen, welche sich durch Elimination von λ und μ aus den fünf Gleichungen (9) ergeben

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - v'\right)\frac{d^2 V}{\partial y''^2} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y''} - v_1\right)^2$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} - 2v_1 - v_2'\right)\frac{\partial^2 V}{\partial y''^2} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y''} - v_2\right)^2$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'} - v - v_1'\right)\frac{\partial^2 V}{\partial y''^2} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y''} - v_1\right)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y''} - v_2\right)$$

und die aus der Elimination von $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$ aus den Gleichungen (11) hervorgehenden Differentialgleichungen

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - v'\right)\frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'''} - v_4\right)^2$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} - v_1' - 2v_3\right)\frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y'''} - v_5\right)^2$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y''^2} - v_2' - 2v_5\right)\frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y'' \partial y'''} - v_2\right)^2$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'} - v - v_3'\right)\frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y'''} - v_5\right)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'''} - v_4\right)$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y''} - v_3 - v_4'\right)\frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y'' \partial y'''} - v_2\right)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'''} - v_4\right)$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y''} - v_1 - v_4 - v_5'\right)\frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y'' \partial y'''} - v_2\right)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y'''} - v_5\right)$$

und so kömmt man, je weiter man fortschreitet, zu immer mehr, aber wenigstens nicht zu complicirteren Gleichungen ersten Grades.

Aber das ist klar, dass wenn man bei dem ersten hier erwähnten Beispiele λ kennen würde, v sich ohne Integration ergäbe, es ist nämlich

$$v = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'} - \lambda \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}$$

eben so, wenn man bei dem zweiten Beispiele λ und μ kennen würde, v, v_1 und v_2 fast gar keine Berechnung mehr erfordern, es ist nämlich

$$r_1 = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y''} - \mu \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2}$$
$$r_2 = \frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y''} - \lambda \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2}$$
$$r = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y''} - \mu \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2}\right)' - \lambda\mu \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2}$$

und so hätte man im dritten Beispiele, wenn λ_1 λ_2 λ_3 bekannt wären:

$$r_2 = \frac{\partial^2 V}{\partial y'' \partial y'''} - \lambda_1 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2}$$
$$r_4 = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'''} - \lambda_3 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2}$$
$$r_5 = \frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y'''} - \lambda_2 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2}$$
$$r_1 = \frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y''} - \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'''} + \lambda_3 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y'''} - \lambda_2 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2}\right)' - \lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2}$$
$$r_3 = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y''} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'''} - \lambda_3 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2}\right)' - \lambda_1 \lambda_3 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2}$$
$$r = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y''}\right)' + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'''} - \lambda_3 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2}\right)'' + \left(\lambda_1 \lambda_3 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2}\right)' - \lambda_2 \lambda_3 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2}$$

u. s. f. u. s. f.

Durch wiederholt angewandte und geschickt durchgeführte partielle Integration gelang es Jacobi, den Ausdruck:

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta y \left\{\frac{\partial W}{\partial y} - \left[\frac{\partial W}{\partial y'}\right]' + \left[\frac{\partial W}{\partial y''}\right]'' - \ldots + (-1)^n \left[\frac{\partial W}{\partial y^{(n)}}\right]^{(n)}\right\} dx$$

so zu transformiren, dass unter dem Integralzeichen ein vollständiges Quadrat zu stehen kömmt; oder mit andern Worten, es gelang ihm, den Ausdruck (5) auf die Form:

$$\Big\{U_{0,0}\, \delta y^2 + U_{1,1}\, \delta y'^2 + U_{2,2}\, \delta y''^2 + \ldots + U_{n-1,n-1}\, \delta y^{(n-1)2}$$
$$+ 2\, U_{0,1}\, \delta y \delta y' + 2\, U_{0,2}\, \delta y \delta y'' + 2\, U_{1,2}\, \delta y' \delta y'' + \ldots$$
$$+ 2\, U_{n-2,n-1}\, \delta y^{(n-2)}\, \delta y^{(n-1)}\Big\}_{x_1}^{x_2}$$
$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 V}{\partial y^{(n)2}} \left[\delta y^{(n)} + \lambda_1\, \delta y^{(n-1)} + \lambda_2\, \delta y^{(n-2)} + \ldots + \lambda_n\, \delta y\right]^2 dx$$

zu bringen, woraus sich also unmittelbar die Werthe von λ ergeben, und folglich mittelst derselben die übrigen zu bestimmenden Grössen.

Dies ist die Haupt-Pointe dieser höchst merkwürdigen Jacobi'schen Arbeit. Mir ist es geglückt, auf eine andere viel einfachere Weise die Werthe von λ zu bestimmen, wodurch sich die complicirte und schwierige Transformation Jacobi's umgehen lässt.

§. 5.

Ich will vorerst den Beweis eines von Jacobi erwähnten Lehrsatzes führen, der für diese Theorie von grosser Wichtigkeit ist. Es sei

$$\varphi\,(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}) = 0 \tag{12}$$

eine Differentialgleichung n^{ten} Grades.

$$y = \psi\,(x, a_1, a_2, a_3, \ldots a_n) \tag{13}$$

das vollständige Integrale derselben. Denkt man sich diesen Werth von y in (12) eingeführt, so erhält man eine identische Gleichung; differenzirt man dann dieselbe noch irgend ein a, so erhält man:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial\varphi}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial a} + \frac{\partial\varphi}{\partial y''}\frac{\partial y''}{\partial a} + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial y^{(n)}}\frac{\partial y^{(n)}}{\partial a} = 0 \tag{14}$$

und dies ist offenbar wieder eine identische Gleichung. Setzt man:

$$\frac{\partial y}{\partial a} = z, \text{ so ist: } \frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\partial a} = \frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)}{\partial x}, \text{ oder } \frac{\partial y'}{\partial a} = \frac{\partial z}{\partial x}$$

und eben so:

$$\frac{\partial y''}{\partial a} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial y'''}{\partial a} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \ldots \frac{\partial y^{(n)}}{\partial a} = \frac{\partial^n z}{\partial x^n}$$

und die Gleichung (14) geht über in:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}z + \frac{\partial\varphi}{\partial y'}z' + \frac{\partial\varphi}{\partial y''}z'' + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial y^{(n)}}z^{(n)} = 0 \tag{15}$$

und ist, wie man sieht, eine lineare Differentialgleichung, der genügt wird für

$$z = \frac{\partial y}{\partial a_1}, z = \frac{\partial y}{\partial a_2}, z = \frac{\partial y}{\partial a_3}, \ldots z = \frac{\partial y}{\partial a^n}$$

es ist folglich das vollständige Integrale derselben:

$$z = C_1\frac{\partial y}{\partial a_1} + C_2\frac{\partial y}{\partial a_2} + C_3\frac{\partial y}{\partial a_3} + \ldots + C_n\frac{\partial y}{\partial a_n}$$

Kennt man daher das Integrale der Gleichung (12), so kennt man auch das Integrale der Gleichung (15), vorausgesetzt, dass man in $\frac{d\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial y'}, \frac{\partial\varphi}{\partial y''}, \ldots \frac{\partial\varphi}{\partial y^{(n)}}$ statt y seinen in (13) stehenden Werth gesetzt hat.

Betrachten wir nun die zwei Gleichungen:

$$\frac{\partial V}{\partial y} - \left[\frac{\partial V}{\partial y'}\right]' + \left[\frac{\partial V}{\partial y''}\right]'' - \cdots + (-1)^n \left[\frac{\partial V}{\partial y^{(n)}}\right]^{(n)} = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} - \left[\frac{\partial W}{\partial y'}\right]' + \left[\frac{\partial W}{\partial y''}\right]'' - \cdots + (-1)^n \left[\frac{\partial W}{\partial y^{(n)}}\right]^{(n)} = 0 \tag{16}$$

welche, da

$$W = \frac{\partial V}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial V}{\partial y'}\,\delta y' + \frac{\partial V}{\partial y''}\,\delta y'' + \cdots + \frac{\partial V}{\partial y^{(n)}}\,\delta y^{(n)}$$

ist, in demselben analytischen Zusammenhange stehen, wie die Gleichungen (12) und (15), so hat man, wenn das Integral der Gleichung (3)

$$y = \varphi\,(x, a_1, a_2, a_3, \ldots a_m)$$

ist, für das Integrale der Gleichung (16)

$$\delta y = C_1 \frac{\partial y}{\partial a_1} + C_2 \frac{\partial y}{\partial a_2} + C_3 \frac{\partial y}{\partial a_3} + \cdots + C_m \frac{\partial y}{\partial a_m}$$

unter $C_1, C_2, C_3, \ldots C_m$ willkürlichen Constanten verstanden.

§. 6.

Um nun zu den allgemeinen Ausdrücken von $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$ zu gelangen, betrachte man die zu identificirende Gleichung

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta y \left\{\frac{\partial W}{\partial y} - \left[\frac{\partial W}{\partial y'}\right]' + \left[\frac{\partial W}{\partial y''}\right]'' - \cdots + (-1)^n \left[\frac{\partial W}{\partial y^{(n)}}\right]^{(n)}\right\} dx +$$

$$+ \left\{\delta y \left\{\frac{\partial W}{\partial y'} - \left[\frac{\partial W}{\partial y''}\right]' + \left[\frac{\partial W}{\partial y'''}\right]'' - \cdots + (-1)^{n-1} \left[\frac{\partial W}{\partial y^{(n)}}\right]^{(n-1)}\right\}\right\}_{x_1}^{x_2} +$$

$$+ \left\{\delta y' \left\{\frac{\partial W}{\partial y''} - \left[\frac{\partial W}{\partial y'''}\right]' + \left[\frac{\partial W}{\partial y''''}\right]'' - \cdots + (-1)^{n-2} \left[\frac{\partial W}{\partial y^{(n)}}\right]^{(n-2)}\right\}\right\}_{x_1}^{x_2} +$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \left\{\delta y^{(n-1)} \frac{\partial W}{\partial y^{(n)}}\right\}_{x_1}^{x_2} =$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 V}{\partial y^{(n)2}} \left(\delta y^{(n)} + \lambda_1 \, \delta y^{(n-1)} + \lambda_2 \, \delta y^{(n-2)} + \ldots + \lambda_n \, \delta y \right)^2 +$$
$$+ \{ U_{0,0} \, \delta y^2 + U_{1,1} \, \delta y'^2 + U_{2,2} \, \delta y''^2 + \ldots + U_{n-1,n-1} \, \delta y^{(n-1)2} +$$
$$+ 2 \, U_{0,1} \, \delta y \, \delta y' + 2 \, U_{0,2} \, \delta y \, \delta y'' + 2 \, U_{1,2} \, \delta y' \, \delta y'' + \ldots$$
$$+ 2 \, U_{n-2,n-1} \, \delta y^{(n-2)} \, \delta y^{(n-1)} \}_{x_1}^{x_2}$$

Setzt man in dem ersten Theile derselben statt δy den Ausdruck:

$$A_1 \frac{\partial y}{\partial a_1} + A_2 \frac{\partial y}{\partial a_2} + A_3 \frac{\partial y}{\partial a_3} + \ldots + A_{2n} \frac{\partial y}{\partial a_{2n}}$$

unter $A_1 \; A_2 \; A_3 \ldots A_{2n}$ willkürliche Constante verstanden, so verschwindet das unter dem Integralzeichen Stehende; folglich muss auch der Ausdruck unter dem Integralzeichen im zweiten Theile der Gleichung, wenn man statt δy denselben Werth setzt, verschwinden, weil dieser Theil dem ersten identisch gleich sein soll, oder mit andern Worten

$$\delta y = A_1 \frac{\partial y}{\partial a_1} + A_2 \frac{\partial y}{\partial a_2} + A_3 \frac{\partial y}{\partial a_3} + \ldots + A_{2n} \frac{\partial y}{\partial a_{2n}}$$

muss ein particuläres Integrale der Differentialgleichung

$$\delta y^{(n)} + \lambda_1 \, \delta y^{(n-1)} + \lambda_2 \, \delta y^{(n-2)} + \ldots + \lambda_n \, \delta y = 0 \qquad (17)$$

sein. Setzt man ferner:

$$\delta y = B_1 \frac{\partial y}{\partial a_1} + B_2 \frac{\partial y}{\partial a_2} + B_3 \frac{\partial y}{\partial a_3} + \ldots + B_{2n} \frac{\partial y}{\partial a_{2n}}$$

unter $B_1, B_2, B_3 \ldots B_{2n}$ ebenfalls willkürliche Constante verstanden, so lässt sich von diesem Ausdrucke dasselbe sagen, ebenso wenn man:

$$\delta y = C_1 \frac{\partial y}{\partial a_1} + C_2 \frac{\partial y}{\partial a_2} + C_2 \frac{\partial y}{\partial a_3} + \ldots + C_{2n} \frac{\partial y}{\partial a_{2n}}$$

setzen würde, u. s. f. Man kann daher n solche Ausdrücke als die n particulären Integrale der Gleichung (17) betrachten, und demgemäss die Coëfficienten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots$ bestimmen. Nennt man diese Werthe von δy der Reihe nach

$$u_1, \; u_2, \; u_3 \; \ldots \; u_n$$

so hat man folgende Gleichungen

$$u_1^{(n)} + \lambda_1 u_1^{(n-1)} + \lambda_2 u_1^{(n-2)} + \ldots + \lambda_n u_1 = 0$$
$$u_2^{(n)} + \lambda_1 u_2^{(n-1)} + \lambda_2 u_2^{(n-2)} + \ldots + \lambda_n u_2 = 0$$
$$u_3^{(n)} + \lambda_1 u_3^{(n-1)} + \lambda_2 u_3^{(n-2)} + \ldots + \lambda_n u_3 = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_n^{(n)} + \lambda_1 u_n^{(n-1)} + \lambda_2 u_n^{(n-2)} + \ldots + \lambda_n u_n = 0$$

aus welchen sich leicht $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots \lambda_n$ berechnen lassen.

In den auf diese Weise entstehenden Ausdrücken für $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$ erscheinen $2n^2$ constante Grössen, die aber nicht ganz willkürlich, sondern gewissen Bedingungen unterworfen sind. Es scheint ziemlich schwierig zu sein, diese ganz allgemein anzugeben, wir begnügen uns daher nach Jacobi's und besonders Delaunay's Vorgang mit der ausführlichen Untersuchung specieller Fälle.

§. 7.

Untersuchung des speciellen Falles, wenn $V = \varphi\,(x, y, y')$ ist.

Die Glieder der zweiten Ordnung lassen sich, wie auch ganz allgemein gezeigt wurde, auf folgende drei verschiedene Weisen darstellen:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} w^2 + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'} w w' + \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} w'^2 \right) dx \tag{18}$$

$$\left\{ w \cdot \frac{\partial W}{\partial y'} \right\}_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} w \left\{ \frac{\partial W}{\partial y} - \left[\frac{\partial W}{\partial y'} \right]' \right\} dx \tag{19}$$

$$\left\{ v\, w^2 \right\}_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} (w' + \lambda\, w)^2\, dx \tag{20}$$

die einander identisch gleich sind. Die in (19) vorkommende Grösse W ist gleich

$$W = \frac{\partial V}{\partial y} w + \frac{\partial V}{\partial y'} w'$$

und die in (20) vorkommenden Grössen v und λ haben zu genügen den Gleichungen (7), diese sind:

$$\frac{d^2 V}{\partial y^2} = v' + \lambda^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} \tag{7}$$
$$\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'} = v + \lambda \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}$$

Wir nehmen an, dass die Gleichung

$$\frac{dV}{\partial y} - \left[\frac{\partial V}{\partial y'}\right]' = 0$$

integrirt werden kann, und dass ihr Integral

$$y = \varphi\,(x,\ a_1,\ a_2)$$

sei; das Integral der Gleichung

$$\frac{\partial W}{\partial y} - \left[\frac{\partial W}{\partial y'}\right]' = 0$$

die sich in entwickelter Gestalt auch so schreiben lässt:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}\ w'' + \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}\ w' + \left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'}\right)' - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right] w = 0 \qquad (21)$$

ist dann:

$$w = C_1 \frac{\partial y}{\partial a_1} + C_2 \frac{\partial y}{\partial a_2}$$

was wir der Kürze wegen $w = u$ schreiben wollen. Wir wählen nun λ so, dass $w{=}u$ das Integral der linearen Differentialgleichung:

$$w' + \lambda\, w = 0$$

werde, und haben demgemäss

$$u' + \lambda\, u = 0$$

woraus

$$\lambda = -\frac{u'}{u}$$

folgt. Aus der zweiten der Gleichungen (7) ergibt sich dann:

$$v = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'} + \frac{u'}{u}\ \frac{d^2 V}{\partial y'^2}$$

und jetzt bleibt uns nur noch übrig, um unsere Analyse gegen jeden Einwand zu sichern, nachzuweisen, dass die Werthe von λ und v der Gleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = v' + \lambda^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}$$

identisch genügen. Substituirt man daher λ und v in dieser Gleichung, so erhält man:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'}\right)' + \frac{u'}{u}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}\right)' + \frac{d^2 V}{\partial y'^2} \cdot \frac{uu'' - u'^2}{u^2} + \frac{u'^2}{u^2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}$$

Die beiden letzten Glieder heben sich auf, multiplicirt man dann die ganze Gleichung mit u und ordnet gehörig, so erhält man:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}\ u'' + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}\right)' u' + \left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'}\right)' - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right] u = 0$$

was wirklich identisch stattfindet, weil $w=u$ das Integrale der Gleichung (21) ist. Man hat somit:

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\, w^2 + 2\,\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'}\, ww' + \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}\, w'^2\right) dx =$$

$$=\left\{ w^2 \left[\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'} + \frac{C_1 \dfrac{\partial y'}{\partial a_1} + C_2 \dfrac{\partial y'}{\partial a_2}}{C_1 \dfrac{dy}{\partial a_1} + C_2 \dfrac{\partial y}{\partial a_2}} \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}\right] \right\}_{x_1}^{x_2} +$$

$$+\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} \left(w' - \frac{C_1 \dfrac{\partial y'}{\partial a_1} + C_2 \dfrac{\partial y'}{\partial a_2}}{C_1 \dfrac{\partial y}{\partial a_1} + C_2 \dfrac{\partial y}{\partial a_2}}\, w \right)^2 dx$$

oder wenn man $\dfrac{C_2}{C_1} = m$ setzt, so ist der zweite Theil dieser Gleichung

$$\left\{ w^2 \left[\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'} + \frac{\dfrac{\partial y'}{\partial a_1} + m\, \dfrac{\partial y'}{\partial a_2}}{\dfrac{\partial y}{\partial a_1} + m\, \dfrac{\partial y}{\partial a_2}} \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}\right] \right\}_{x_1}^{x_2} +$$

$$+\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} \left(w' - \frac{\dfrac{dy'}{\partial a_1} + m\, \dfrac{\partial y'}{\partial a_2}}{\dfrac{\partial y}{\partial a_1} + m\, \dfrac{\partial y}{\partial y_2}}\, w \right)^2 dx$$

welcher eine willkürliche Constante enthält, was übrigens schon daraus folgt, weil v durch eine Differentialgleichung ersten Grades gegeben ist.

Die Kriterien sind daher in diesem Falle höchst einfach $\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 V}{\partial y dy'}$ und $\dfrac{\partial^2 V}{\partial y'^2}$ dürfen innerhalb der Integrationsgrenzen nicht durch unendlich gehen, denn sonst würde der erste Theil der letzten Gleichung nämlich der Ausdruck (18) unstättig sein; ferner muss $\dfrac{\partial^2 V}{\partial y'^2}$ für alle Werthe von $x = x_1$ bis $x = x_2$ stets dasselbe Zeichen beibehalten, endlich muss noch die willkürliche Constante m so gewählt werden können, dass für keinen zwischen x_1 und x_2 liegenden Werth von x der Nenner $\dfrac{\partial y}{\partial a_1} + m\,\dfrac{\partial y}{\partial a_2}$ gleich Null wird.

Findet alles dieses Statt, und lässt sich ein solcher Werth von m ausfindig machen; der es unmöglich macht, dass zwischen den Integrationsgrenzen $\frac{\partial y}{\partial a_1} + m \frac{\partial y}{\partial a_2} = o$ wird, so kann man, weil für die Grenzwerthe w gleich Null ist, die obige Gleichung so schreiben:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \delta y^2 + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'} \delta y \frac{d\delta y}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} \left(\frac{\partial \delta y}{\partial x}\right)^2\right] dx =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2 V}{dy'^2} \left(\frac{\partial \delta y}{\partial x} - \frac{\frac{\partial y'}{\partial a_1} + m \frac{\partial y'}{\partial a_2}}{\frac{\partial y}{\partial a_1} + m \frac{\partial y}{\partial a}} \delta y\right)^2 . dx$$

und hat somit ein Maximum oder Minimum, je nachdem $\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}$ für alle zwischen x_1 und x_2 liegenden Werthe negativ oder positiv ist.

§. 8.

Ist aber $\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} = 0$, d. h. ist $V = f(x, y) + y'f(x, y)$, (ein Fall, den weder Jacobi noch Delaunay einer Discussion unterzog) so muss die eben angeführte Analyse abgeändert werden, denn man hat statt der Differentialgleichung

$$\frac{\partial V}{\partial y} - \left[\frac{\partial V}{\partial y'}\right]' = 0$$

die sich hier so stellt:

$$\frac{\partial f}{\partial y} + y' \frac{\partial f}{\partial y} - [f(x, y)]' = 0$$

wenn man gehörig reducirt, folgende gewöhnliche Gleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

aus welcher y als Function von x ohne willkürliche Constante hervorgeht. Die unmittelbare Folge hiervon ist, dass die Coordinaten der Grenzpunkte der gesuchten Curven nicht mehr, wie im vorhergehenden Falle willkürlich, sondern der Bedingung unterworfen sind, der zuletzt aufgeschriebenen Gleichung zu genügen, d. h. mit andern Worten, die Endpunkte sind Punkte der Curve, deren Gleichung $\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} = 0$ ist; findet dieses nicht Statt, so ist die Aufgabe unmöglich.

Hier hat man nun:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} w^2 + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'} w w'\right) dx = \left\{w \frac{\partial W}{\partial y'}\right\}_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} w \left\{\frac{\partial W}{\partial y} - \left[\frac{\partial W}{\partial y'}\right]'\right\} dx$$

wo, wie man leicht sieht:

$$\frac{\partial W}{\partial y} - \left[\frac{\partial W}{\partial y'}\right]' = \left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'}\right)' - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right] w$$

und

$$\frac{\partial W}{\partial y'} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'} w$$

ist; da ferner für die Grenzwerthe $w = 0$ ist, so folgt:

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} w^2 + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'} w\, w'\right) dx = \int_{x_1}^{x_2} w^2 \left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'}\right)' - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right] dx$$

und es gelten daher in diesem speciellen Falle für die Kriterien des Grössten und Kleinsten folgende Vorschriften:

Die Glieder $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ und $\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'}$ dürfen innerhalb der Integrationsgrenzen nicht durch unendlich gehen, ferner muss:

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'}\right)' - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

für alle Werthe von $x = x_1$ bis $x = x_2$ stets dasselbe Zeichen beibehalten, und zwar ein negatives, wenn ein Maximum und ein positives, wenn ein Minimum sein soll.

Wäre auch $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'}\right)' - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$ so wäre Vdx ein vollständiges Differential, und die Untersuchung müsste dann auf andere Art geführt werden.

§. 9.

Untersuchung des speciellen Falles, wenn $V = \psi(x, y, y', y'')$ ist.

Die Glieder der zweiten Ordnung lassen sich in diesem Falle auf folgende drei verschiedene Weisen darstellen:

$$(22) \qquad \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} w^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} w'^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2} w''^2 + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'} w w' + \right.$$
$$\left. + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial y\, y''} w w'' + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y''} w' w''\right) dx$$

$$(23) \qquad \left[w \left\{\frac{\partial W}{\partial y'} - \left[\frac{\partial W}{\partial y''}\right]'\right\} + w' \frac{\partial W}{\partial y''}\right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} w \left\{\frac{\partial W}{\partial y} - \left[\frac{\partial W}{\partial y'}\right]' + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{\partial W}{\partial y''}\right]''\right\} dx$$

$$\left(vw^2 + 2\,v_1 w w' + v_2 w'^2\right)_{x_1}^{x_2} + \int_{x}^{x_2} \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2}\,(w'' + \lambda w' + \mu w)^2\,dx \qquad (24)$$

die einander identisch gleich sind. Die in (23) vorkommende Grösse W ist gleich

$$W = \frac{\partial V}{\partial y}\,w + \frac{\partial V}{\partial y'}\,w' + \frac{\partial V}{\partial y''}\,w''$$

und die in (24) vorkommenden Grössen v, v_1, v_2, λ und μ haben zu genügen den Gleichungen (9), diese sind:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= v' + \mu^2\,\frac{\partial^2 V}{\partial y''^2}\\
\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} &= 2\,v_1 + v_2' + \lambda^2\,\frac{\partial^2 V}{\partial y''^2}\\
\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial y'} &= v + v_1' + \lambda\mu\,\frac{\partial^2 V}{\partial y''^2}\\
\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial y''} &= v_1 + \mu\,\frac{\partial^2 V}{\partial y''^2}\\
\frac{\partial^2 V}{\partial y'\,\partial y''} &= v_2 + \lambda\,\frac{\partial^2 V}{\partial y''^2}
\end{aligned} \qquad (9)$$

Wir nehmen an, dass die Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial y} - \left[\frac{\partial V}{\partial y'}\right]' + \left[\frac{\partial V}{\partial y''}\right]'' = 0$$

integrirt werden kann, und dass ihr Integrale

$$y = \varphi\,(x, a_1, a_2, a_3, a_4)$$

sei; das Integral der Gleichung

$$\frac{\partial W}{\partial y} - \left[\frac{\partial W}{\partial y'}\right]' + \left[\frac{\partial W}{\partial y''}\right]'' = 0$$

die sich in entwickelter Gestalt auch so schreiben lässt:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 V}{\partial y''^2}\,w'''' + 2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y''^2}\right)' w''' + \Bigg[2\,\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial y''} - \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y'\partial y''}\right)' +\\
&\quad + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y''^2}\right)''\Bigg] w'' + \Bigg[2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial y''}\right)' - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}\right)' + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y'\partial y''}\right)''\Bigg] w' +\\
&\qquad + \Bigg[\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial y'}\right)' + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial y''}\right)''\Bigg] w = 0
\end{aligned}$$

oder kürzer, wenn man

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = A,\ \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} = B,\ \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2} = C,\ \frac{\partial^2 V}{\partial y'\partial y''} = D,\ \frac{\partial^2 V}{\partial y\partial y''} = E,\ \frac{\partial^2 V}{\partial y\partial y'} = F$$

setzt

(25) $$C w'''' + 2 C' w''' + (2E - B + D' + C'') w'' + (2E' - B' + \\ + D'') w' + (A - F + E'') w = 0$$

ist dann:

$$\delta y = A_1 \frac{\partial y}{\partial a_1} + A_2 \frac{\partial y}{\partial a_2} + A_3 \frac{\partial y}{\partial a_3} + A_4 \frac{\partial y}{\partial a_4}$$

oder

$$\delta y = B_1 \frac{\partial y}{\partial a_1} + B_2 \frac{\partial y}{\partial a_2} + B_3 \frac{\partial y}{\partial a_3} + B_4 \frac{\partial y}{\partial a_4}$$

von denen wir das erstere mit u_1 das zweite mit u_2 bezeichnen. Wählen wir nun λ und μ so, dass $\delta y = u_1$ und $\delta y = u_2$ die particulären Integrale der linearen Differenzialgleichung

$$w'' + \lambda w' + \mu w = 0$$

werden, so haben wir demgemäss:

$$u_1'' + \lambda u_1' + \mu u_1 = 0$$
$$u_2'' + \lambda u_2' + \mu u_2 = 0$$

woraus

$$\lambda = \frac{u_2 u_1'' - u_1 u_2''}{u_1 u_2' - u_2 u_1'}$$

$$\mu = \frac{u_2'' u_1' - u_1'' u_2'}{u_1 u_2' - u_2 u_1'}$$

folgen. Aus den drei letzten der Gleichungen (9) ergeben sich dann:

(26) $$\begin{aligned} v &= F - \left(E - \frac{u_2'' u_1' - u_1'' u_2'}{u_1 u_2' - u_2 u_1'} . C\right)' - \\ &\quad - \frac{u_2 u_1'' - u_1 u_2''}{u_1 u_2' - u_2 u_1'} . \frac{u_2'' u_1' - u_1'' u_2'}{u_1 u_2' - u_2 u_1'} . C \\ v_1 &= E - \frac{u_2'' u_1' - u_1'' u_2'}{u_1 u_2' - u_2 u_1'} . C \\ v_2 &= D - \frac{u_2 u_1'' - u_1 u_2''}{u_1 u_2' - u_2 u_1'} . C \end{aligned}$$

und jetzt bleibt uns wieder nur noch übrig, um unsere Analyse gegen jeden Einwand zu sichern, nachzuweisen, dass die gefundenen Werthe von λ, μ, v_1 und v_2 erstens den Gleichungen

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = v' + \mu^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} = 2 v_1 + v_2' + \lambda^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2}$$

identisch genügen, und zweitens, dass sie mit der gehörigen Anzahl willkürlicher Constanten versehen sind. Da die Gleichungen (9) durch Elimination von λ und μ auf drei Differentialgleichungen ersten Grades führen, so müssen in den Resultaten unserer Rechnung drei willkürliche Constante erscheinen. Berechnen wir vorerst die Werthe von λ und μ. Wir haben:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= A_1 \frac{\partial y}{\partial a_1} + A_2 \frac{\partial y}{\partial a_2} + A_3 \frac{\partial y}{\partial a_3} + A_4 \frac{\partial y}{\partial a_4} \\
u_1' &= A_1 \frac{\partial y'}{\partial a_1} + A_2 \frac{\partial y'}{\partial a_2} + A_3 \frac{\partial y'}{\partial a_3} + A_4 \frac{\partial y'}{\partial a_4} \\
u_1'' &= A_1 \frac{\partial y''}{\partial a_1} + A_2 \frac{\partial y''}{\partial a_2} + A_3 \frac{\partial y''}{\partial a_3} + A_4 \frac{\partial y''}{\partial a_4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_2 &= B_1 \frac{\partial y}{\partial a_1} + B_2 \frac{\partial y}{\partial a_2} + B_3 \frac{\partial y}{\partial a_3} + B_4 \frac{\partial y}{\partial a_4} \\
u_2' &= B_1 \frac{\partial y'}{\partial a_1} + B_2 \frac{\partial y'}{\partial a_2} + B_3 \frac{\partial y'}{\partial a_3} + B_4 \frac{\partial y'}{\partial a_4} \\
u_2'' &= B_1 \frac{\partial y''}{\partial a_1} + B_2 \frac{\partial y''}{\partial a_2} + B_3 \frac{\partial y''}{\partial a_3} + B_4 \frac{\partial y''}{\partial a_4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_1 u_2' - u_2 u_1' = C_1 &\left(\frac{\partial y}{\partial a_2}\frac{\partial y'}{\partial a_1} - \frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial y'}{\partial a_2}\right) + C_2\left(\frac{\partial y}{\partial a_3}\frac{\partial y'}{\partial a_1} - \frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial y'}{\partial a_3}\right) + \\
+ C_3 &\left(\frac{\partial y}{\partial a_4}\frac{\partial y'}{\partial a_1} - \frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial y'}{\partial a_4}\right) + C_4\left(\frac{\partial y}{\partial a_3}\frac{\partial y'}{\partial a_2} - \frac{\partial y}{\partial a_2}\frac{\partial y'}{\partial a_3}\right) + \\
+ C_5 &\left(\frac{\partial y}{\partial a_4}\frac{\partial y'}{\partial a_2} - \frac{\partial y}{\partial a_2}\frac{\partial y'}{\partial a_4}\right) + C_6\left(\frac{\partial y}{\partial a_4}\frac{\partial y'}{\partial a_3} - \frac{\partial y}{\partial a_3}\frac{\partial y'}{\partial a_4}\right)
\end{aligned} \tag{27}
$$

$$
\begin{aligned}
u_1 u_2'' - u_2 u_1'' = C_1 &\left(\frac{\partial y}{\partial a_2}\frac{\partial y''}{\partial a_1} - \frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial y''}{\partial a_2}\right) + C_2\left(\frac{\partial y}{\partial a_3}\frac{\partial y''}{\partial a_1} - \frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial y''}{\partial a_3}\right) + \\
+ C_3 &\left(\frac{\partial y}{\partial a_4}\frac{\partial y''}{\partial a_1} - \frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial y''}{\partial a_4}\right) + C_4\left(\frac{\partial y}{\partial a_3}\frac{\partial y''}{\partial a_2} - \frac{\partial y}{\partial a_2}\frac{\partial y''}{\partial a_3}\right) + \\
+ C_5 &\left(\frac{\partial y}{\partial a_4}\frac{\partial y''}{\partial a_2} - \frac{\partial y}{\partial a_2}\frac{\partial y''}{\partial a_4}\right) + C_6\left(\frac{\partial y}{\partial a_4}\frac{\partial y''}{\partial a_3} - \frac{\partial y}{\partial a_3}\frac{\partial y''}{\partial a_4}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_1' u_2'' - u_2' u_1'' = C_1 &\left(\frac{\partial y'}{\partial a_2}\frac{\partial y''}{\partial a_1} - \frac{\partial y'}{\partial a_1}\frac{\partial y''}{\partial a_2}\right) + C_2\left(\frac{\partial y'}{\partial a_3}\frac{\partial y''}{\partial a_1} - \frac{\partial y'}{\partial a_1}\frac{\partial y''}{\partial a_3}\right) + \\
+ C_3 &\left(\frac{\partial y'}{\partial a_4}\frac{\partial y''}{\partial a_1} - \frac{\partial y'}{\partial a_1}\frac{\partial y''}{\partial a_4}\right) + C_4\left(\frac{\partial y'}{\partial a_3}\frac{\partial y''}{\partial a_2} - \frac{\partial y'}{\partial a_2}\frac{\partial y''}{\partial a_3}\right) + \\
+ C_5 &\left(\frac{\partial y'}{\partial a_4}\frac{\partial y''}{\partial a_2} - \frac{\partial y'}{\partial a_2}\frac{\partial y''}{\partial a_4}\right) + C_6\left(\frac{\partial y'}{\partial a_4}\frac{\partial y''}{\partial a_3} - \frac{\partial y'}{\partial a_3}\frac{\partial y''}{\partial a_4}\right)
\end{aligned}
$$

wo $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ folgende Bedeutungen haben:

$$(28) \quad \begin{aligned} C_1 &= A_2B_1 - A_1B_2 \\ C_2 &= A_3B_1 - A_1B_3 \\ C_3 &= A_4B_1 - A_1B_4 \\ C_4 &= A_3B_2 - A_2B_3 \\ C_5 &= A_4B_2 - A_2B_4 \\ C_6 &= A_4B_3 - A_3B_4 \end{aligned}$$

Wir wollen die Gleichungen (27) kurz so schreiben:

$$\begin{aligned} u_1u_2' - u_2u_1' &= C_1P_1 + C_2P_2 + C_3P_3 + C_4P_4 + C_5P_5 + C_6P_6 \\ u_1u_2'' - u_2u_1'' &= C_1Q_1 + C_2Q_2 + C_3Q_3 + C_4Q_4 + C_5Q_5 + C_6Q_6 \\ u_1'u_2'' - u_2'u_1'' &= C_1R_1 + C_2R_2 + C_3R_3 + C_4R_4 + C_5R_5 + C_6R_6 \end{aligned}$$

wo C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, constant, P, Q, R hingegen bestimmte Functionen von x sind. In λ und μ erscheinen somit blos sechs Constante, nämlich die erwähnten C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, welche aber nicht ganz willkürlich sind, da

$$C_1C_6 - C_2C_5 + C_3C_4 = 0$$

ist, wie man sich durch unmittelbarer Entwicklung des Ausdruckes

$$(A_2B_1 - A_1B_2)(A_4B_3 - A_3B_4) - (A_3B_1 - A_1B_3)(A_4B_2 - \\ - A_2B_4) + (A_4B_1 - A_1B_4)(A_3B_2 - A_2B_3)$$

überzeugen kann. Es lässt sich folglich λ und μ so darstellen.

$$(29) \quad \begin{aligned} \lambda &= -\frac{C_1Q_1 + C_2Q_2 + C_3Q_3 + C_4Q_4 + C_5Q_5 + C_6Q_6}{C_1P_1 + C_2P_2 + C_3P_3 + C_4P_4 + C_5P_5 + C_6P_6} \\ \mu &= \frac{C_1R_1 + C_2R_2 + C_3R_3 + C_4R_4 + C_5R_5 + C_6R_6}{C_1P_1 + C_2P_2 + C_3P_3 + C_4P_4 + C_5P_5 + C_6P_6} \end{aligned}$$

Multiplicirt man Zähler und Nenner von λ und μ mit C_5 und setzt statt C_2C_5 seinen Werth $C_1C_6 + C_3C_4$, so erscheinen in λ und μ blos die Constanten

$$C_1, C_3, C_4, C_5, C_6$$

man kann dann noch durch irgend einen der Coëfficienten Zähler und Nenner dividiren, und hat somit in λ und μ blos die vier Verhältnisse

$$\frac{C_2}{C_1}, \quad \frac{C_4}{C_1}, \quad \frac{C_5}{C_1}, \quad \frac{C_6}{C_1}$$

eingeführt. — Man kann noch zum Überflusse bemerken, dass zwischen den Grössen P, Q, R, die Gleichungen stattfinden:

$$\begin{aligned} P_1\ P_6 - P_2\ P_5 + P_3\ P_4 &= 0 \\ Q_1\ Q_6 - Q_2\ Q_5 + Q_3\ Q_4 &= 0 \\ R_1\ R_6 - R_2\ R_5 + R_3\ R_4 &= 0 \end{aligned}$$

Nehmen wir jetzt die zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= v' + \mu^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} &= 2v_1 + v_2' + \lambda^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2} \end{aligned} \tag{30}$$

vor, und setzen in ihnen zuerst statt v, v_1 und v_2 ihre Werthe, so hat man:

$$\begin{aligned} (\mu^2 C - A) + (F - \lambda\mu C)' + (\mu C - E)'' &= 0 \\ 2E - B + (\lambda^2 - 2\mu)C + (D - \lambda C)' &= 0 \end{aligned}$$

Entwickelt man diese Ausdrücke, so erhält man:

$$\begin{aligned} \mu^2 C - A + F' - \lambda\mu C' - \lambda C\mu' - \mu C\lambda' + \mu'' C + \\ 2\mu' C' + \mu C'' - E'' = 0 \\ 2E - B + \lambda^2 C - 2\mu C + D' - \lambda C' - \lambda' C = 0 \end{aligned} \tag{31}$$

Setzt man nun der Kürze halber:

$$\begin{aligned} u_1\ u_2' - u_2\ u_1' &= M_1 \\ u_1\ u_2'' - u_2\ u_1'' &= M_2 \\ u_1\ u_2''' - u_2\ u_1''' &= M_3 \\ u_1'\ u_2'' - u_2'\ u_1'' &= M_4 \\ u_1\ u_2'''' - u_2\ u_1'''' &= M_5 \\ u_1'\ u_2''' - u_2'\ u_1''' &= M_6 \\ u_1'\ u_2'''' - u_2'\ u_1'''' &= M_7 \\ u_1''\ u_2''' - u_2''\ u_1''' &= M_8 \end{aligned}$$

so ist:

$$\begin{aligned} \lambda &= -\frac{M_2}{M_1} \\ \mu &= \frac{M_4}{M_1} \\ \lambda' &= -\frac{M_3}{M_1} - \mu + \lambda^2 \\ \mu' &= \frac{M_6}{M_1} + \lambda\mu \\ \mu'' &= \frac{M_7}{M_1} + \frac{M_8}{M_1} + 2\lambda\mu' - \lambda^2\mu + \lambda'\mu \end{aligned}$$

und wenn man in (31) die Substitution für μ'' durchführt, so hat man statt der Gleichungen (31) folgende Gleichungen:

$$\mu^2 C - A + F' - \lambda\mu C' + \lambda C\mu' + \mu C'' + 2\,\mu' C' - E'' - C\lambda^2\mu + \\ + C\left(\frac{M_7}{M_1} + \frac{M_8}{M_1}\right) = 0$$

$$2\,E - B + \lambda^2 C - 2\,\mu C + D' - \lambda C' - \lambda' C = 0.$$

Setzt man jetzt für λ' und μ' ihre Werthe, so hat man:

$$\mu^2 C - A + F' + \lambda\mu C' + \mu C'' - E'' + C\left(\frac{M_7}{M_1} + \frac{M_8}{M_1} + \lambda\,\frac{M_6}{M_1}\right) + \\ + 2\,C'\,\frac{M_6}{M_1} = 0$$

$$2\,E + D' - \lambda C' - B - \mu C + C\,\frac{M_3}{M_1} = 0.$$

Setzt man endlich auch noch für λ und μ ihre Werthe, so hat man:

(32)
$$C\,\frac{M_4^2}{M_1^2} - A + F' - E'' - C'\,\frac{M_2}{M_1}\,\frac{M_4}{M_1} + C''\,\frac{M_4}{M_1} + \\ + C\,\frac{M_7}{M_1} + C\,\frac{M_8}{M_1} - C\,\frac{M_2}{M_1}\,\frac{M_6}{M_1} + 2\,C'\,\frac{M_6}{M_1} = 0$$

$$2\,E + D' - B + C'\,\frac{M_2}{M_1} - C\,\frac{M_4}{M_1} + C\,\frac{M_3}{M_1} = 0$$

Die erste dieser beiden Gleichungen lässt sich reduciren, wenn man statt $-A+F'-E''$ seinen ihm identisch gleichen Werth setzt, den wir auf folgende Weise erhalten:

Setzt man in der Gleichung (25) statt w, u_1 oder u_2 so erhält man stets eine identische Gleichung, weil u_1 sowohl als auch u_2 die vollständigen Integrale dieser Gleichung sind, man hat daher:

(33)
$$C\,u_1'''' + 2\,C'\,u_1''' + u_1''\,(2\,E + D' + C'' - B) + \\ + u_1'\,(2\,E' + D'' - B') + u_1\,(A - F' + E'') = 0$$

$$C\,u_2'''' + 2\,C'\,u_2''' + u_2''\,(2\,E + D' + C'' - B) + \\ + u_2'\,(2\,E' + D'' - B') + u_2\,(A - F' + E'') = 0$$

Multiplicirt man die erste derselben mit u_2' die zweite mit u_1' und subtrahirt dann beide, so erhält man folgende identische Gleichung:

$$C\,(u_2'\,u_1'''' - u_1'\,u_2'''') + 2\,C'\,(u_2'\,u_1''' - u_1'\,u_2''') + \\ + (u_2'\,u_1'' - u_1'\,u_2'')\,(2E + D' + C'' - B) \\ + (u_1\,u_2' - u_2\,u_1')\,(A - F' + E'') = 0$$

aus welcher folgt:

$$-A+F'-E'' = -C\cdot\frac{M_7}{M_1} - 2\,C'\cdot\frac{M_6}{M_1} - (2\,E + D' + C'' - B)\cdot\frac{M_4}{M_1}$$

Dies in die erste der Gleichungen (32) eingeführt und reducirt gibt:

$$C\left(\frac{M_4{}^2}{M_1{}^2}+\frac{M_8}{M_1}-\frac{M_2}{M_1}\frac{M_6}{M_1}\right)-C'\frac{M_2}{M_1}\frac{M_4}{M_1}-(2\,E+D'-B)\frac{M_4}{M_1}=0$$

Nun ist aber: $M_3\,M_4+M_1\,M_8-M_2\,M_6=o$; folglich:

$$\frac{M_8}{M_1}-\frac{M_2}{M_1}\frac{M_6}{M_1}=-\frac{M_4}{M_1}\frac{M_3}{M_1}$$

und setzt man dies in den obigen Ausdruck, so lässt sich durchgehends $\frac{M_4}{M_1}$ als gemeinschaftlicher Factor herausheben, und man erhält:

$$-\frac{M_4}{M_1}\left(2\,E+D'-B+C'\frac{M_2}{M_1}-C\frac{M_4}{M_1}+C\frac{M_3}{M_1}\right)=0$$

Man sieht hieraus, dass die beiden Gleichungen (32) befriedigt werden, wenn nur die zweite derselben befriedigt wird. Diese lässt sich nun so schreiben:

$$M_1\,(2\,E+D'-B)+C'\,M_8+C\,(M_3-M_4)=0 \tag{34}$$

Differentiirt man dieselbe nach x, so erhält man nach einigen Reductionen:

$$+\,C\,M_5+2\,C'\,M_3+\,(C''+2\,E+D'-B)\,M_2+$$
$$+\,(2\,E'+D''-B')\,M_1=0$$

Multiplicirt man aber die erste der Gleichungen (33) mit u_2 die zweite mit u_1 und subtrahirt man dann beide, so erhält man genau dieselbe Gleichung, zu der wir jetzt gekommen sind. Da aber die Gleichungen (33) identisch stattfinden, so muss auch die aus ihnen gefolgerte identisch stattfinden; ist daher das Differential der Gleichung (34) identisch Null, so muss auf der linken Seite der Gleichung (34) eine reine Function der Constanten

$$C_1,\quad C_2,\quad C_3,\quad C_4,\quad C_5,\quad C_6$$

stehen, welche, so wie der rechte Theil der Gleichung, Null ist. Man hat somit:

$$\int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}w^2+\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}w'^2+\frac{\partial^2 V}{\partial y''^2}w''^2+2\,\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial y'}ww'+2\,\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial y''}ww''+\right.$$
$$\left.+\;2\,\frac{\partial^2 V}{\partial y'\partial y''}\,w'\,w''\right\}dx=$$
$$\Big\{v\,w^2+2\,v_1\,ww'+v_2\,w'^2\Big\}_{x_1}^{x_2}+\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}\,(w''+\lambda\,w'+\mu\,w)^2\,dx$$

wo v, v_1, v_2, λ und μ die in (26) und (29) angegebenen, mit sechs Constanten versehenen Werthe haben, zwischen denen die 2 Bedingungsgleichungen

$$C_1\ C_6 - C_2\ C_5 + C_3\ C_4 = 0$$
$$M_1\ (2\ E + D' - B) + C'\ M_2 + C\ (M_3 - M_4) = 0$$

stattfinden; da ausserdem blos die Verhältnisse der Constanten in den Werthen von v, v_1, v_2, λ und μ eintreten, so haben sie die nothwendige Allgemeinheit.

Die Kriterien sind daher auch in diesem Falle nicht complicirt. Die zweiten Differential-Quotienten von V dürfen innerhalb der Integrationsgrenzen nicht durch unendlich gehen; ferner muss $\frac{\partial^2 V}{\partial y''^2}$ für alle Werthe von $x = x_1$ bis $x = x_2$ stets dasselbe Zeichen beibehalten, endlich müssen noch die drei in der Rechnung eintretenden willkürlichen Constanten so gewählt werden können, dass für keinen zwischen x_1 und x_2 liegenden Werth von x der gemeinschaftliche Nenner von λ und μ gleich Null wird.

Findet alles dieses Statt, und lassen sich für die drei Constanten solche Werthe ausfindig machen, durch die es unmöglich wird, dass der Nenner von λ und μ innerhalb der Integrationsgrenzen gleich Null wird, so kann man, wenn für die Grenzwerthe nicht nur $w = o$ sondern auch $w' = o$ ist, die Glieder der zweiten Ordnung so schreiben:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2}\,(w'' + \lambda\, w' + \mu\, w)^2\,.\,dx$$

und man hat somit ein Maximum oder Minimum, je nachdem $\frac{\partial^2 V}{\partial y''^2}$ für alle zwischen x_1 und x_2 liegenden Werthe negativ oder positiv ist.

§. 10.

Ist aber $\frac{\partial^2 V}{\partial y''^2} = 0$, d. h. ist $V = f(x, y, y') + y'' f(x, y, y')$, so muss die eben angeführte Analyse abgeändert werden, denn die zwei Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial V}{\partial y} - \left[\frac{\partial V}{\partial y'}\right]' + \left[\frac{\partial V}{\partial y''}\right]'' = 0$$
$$\frac{\partial W}{\partial y} - \left[\frac{\partial W}{\partial y'}\right]' + \left[\frac{\partial W}{\partial y''}\right]'' = 0$$

die im Vorhergehenden von der vierten Ordnung waren, gehen jetzt in Differentialgleichungen der zweiten Ordnung über, namentlich erscheint die letztere von ihnen in folgender Form:

$$(2E-B+D')w''+(2E'-B'+D'')w'+(A-F'+E'')w=0$$

und die Integrale der angeführten zwei Gleichungen sind:

$$y=\varphi(x,a_1,a_2)$$
$$\delta y=C_1\frac{\partial y}{\partial a_1}+C_2\frac{\partial y}{\partial a_2}$$

unter C_1 und C_2 willkürliche Constante verstanden.

Bevor wir weiter gehen, bemerken wir, dass in dem hier betrachteten Falle wohl die Endpunkte der Curven, für welche das vorgelegte Integrale ein Maximum oder Minimum werden soll, willkürlich gewählt werden können, nicht aber die Richtung der Tangente an diesen Punkten, diese muss vielmehr aus der Gleichung $y=\varphi(x,a_1,a_2)$ gezogen werden, und ist somit ganz bestimmt; oder wenn man die Tangente an den Endpunkten willkürlich wählen würde, so müssten die Endpunkte solche Coordinaten haben, dass sie der Gleichung $y=\varphi(x,a_1,a_2)$ genügen.

Wir setzen nun an die Stelle des Ausdruckes (24) den Ausdruck:

$$\Big\{v\,w^2+2\,v_1\,w\,w'+v_2\,w'^2\Big\}_{x_1}^{x_2}+\int_{x_1}^{x_2}P\,(w'+\lambda\,w)^2\,dx$$

somit statt der Gleichung (8), die Gleichung:

$$\begin{aligned}A\,w^2+B\,w'^2+2\,F\,w\,w'+2\,E\,w\,w''+2\,D\,w'\,w''&=\\=(v\,w^2+2\,v_1\,w\,w'+v_2\,w'^2)'+P\,(w'+\lambda\,w)^2&\end{aligned}$$

und folglich statt der Gleichungen (9) die Gleichungen:

$$\begin{aligned}A&=\quad v'+P\lambda^2\\B&=2\,v_1+v'_2+P\\F&=\quad v+v'_1+\lambda\,P\\E&=\quad v_1\\D&=\quad v_2\end{aligned}$$

wählen ferner λ der Art, dass

$$w=C_1\frac{\partial y}{\partial a_1}+C_2\frac{\partial y}{\partial a_2}$$

das Integral der Gleichung

$$w'+\lambda\,w=0$$

werde, woraus hervorgeht

$$\lambda = -\frac{u'}{u}$$

unter u der Ausdruck $C_1 \frac{\partial y}{\partial a_1} + C_2 \frac{\partial y}{\partial a_2}$ verstanden.

Jetzt ergeben sich leicht für v, v_1, v_2 und P nachfolgende Werthe:

$$\begin{aligned}
v_1 &= E \\
v_2 &= D \\
P &= B - 2\,E - D' \\
v &= F - E' + \frac{u'}{u}\,(B - 2\,E - D')
\end{aligned}$$

und falls unsere Analyse richtig ist, müssen dieselben in

$$A = v' + P\,\lambda^2$$

substituirt, auf eine identische Gleichung führen. Wir erhalten nun die Substitution durchführend:

$$A = F' - E'' + \frac{u'}{u}\,(B' - 2\,E' - D'') +$$

$$+ (B - 2\,E - D')\,\frac{uu'' - u'^2}{u^2} + \frac{u'^2}{u^2}\,(B - 2\,E - D')$$

wenn man hier die Brüche wegschafft, reducirt und ordnet:

$$(2\,E - B + D')\,u'' + (2\,E' - B' + D'')\,u + (A - F' + E'')\,u = 0$$

und dies ist wirklich identisch, weil $w = u$ das Integral der Gleichung:

$$(2\,E - B + D')\,w'' + (2\,E' - B' + D'')\,w + (A - F' + E'')\,w = 0$$

ist. — Man hat somit:

$$\int_{x_1}^{x_2} (A\,w^2 + B\,w'^2 + 2\,F\,w\,w' + 2\,E\,w\,w'' + 2\,D\,w'\,w'')\,dx =$$

$$\left\{ v\,w^2 + 2\,v_1\,w\,w' + v_2\,w'^2 \right\}_{x_1}^{x_2} +$$

$$+ \int_{x_1}^{x_2} (B - 2\,E - D')\left(w' - \frac{C_1 \frac{\partial y'}{\partial a_1} + C_2 \frac{\partial y'}{\partial a_2}}{C_1 \frac{\partial y}{\partial a_1} + C_2 \frac{\partial y}{\partial a_2}}\right)^2 dx$$

oder, wenn man statt $\frac{C_2}{C_1}$, m setzt, und bedenkt, dass für die Grenzen w und w' gleich Null werden, so hat man für den zweiten Theil dieser Gleichung:

$$\int_{x_1}^{x_2} (B - 2E - D') \left(w' - \frac{\frac{\partial y'}{\partial a_1} + m \frac{\partial y'}{\partial a_2}}{\frac{\partial y}{\partial a_1} + m \frac{\partial y}{\partial a_2}} \right)^2 dx$$

unter m eine willkürliche Constante verstanden.

Die Kriterien für ein Maximum oder Minimum sind daher hier folgende:

Die zweiten Differential-Quotienten von V dürfen innerhalb der Integrationsgrenzen nicht durch unendlich gehen, ferner muss $B—2E—D'$ für alle Werthe von $x = x_1$ bis $x = x_2$ stets dasselbe Zeichen beibehalten, und endlich muss noch die willkürliche Constante m so gewählt werden können, dass für keinen zwischen x_1 und x_2 liegenden Werth von x der Ausdruck $\frac{\partial y}{\partial a_1} + m \frac{\partial y}{\partial a_2}$ gleich Null wird. Ist nun unter diesen Umständen $B—2E—D'$ stets positiv, so hat man ein Minimum und ist es stets negativ, so hat man ein Maximum.

Wir haben endlich noch den Fall zu besprechen, wo nebstdem, dass $\frac{\partial^2 V}{\partial y''^2} = 0$ ist, auch noch die Gleichung $B—2E—D' = 0$ stattfindet. Alsdann hört die Gleichung, die zur Bestimmung von y dient, auf, eine Differentialgleichung zu sein, sondern sie ist eine ganz gewöhnliche, etwa von der Form $y = \varphi(x)$, und jetzt können blos die Abscissen der Endpunkte beliebig gewählt werden, die Ordinaten derselben, so wie die Richtung der Tangente an denselben, folgt aus der Gleichung $y = \varphi(x)$ von selbst. Man hat in diesem Falle für die Glieder der zweiten Ordnung

$$\Big\{ w \left\{ \frac{\partial W}{\partial y'} - \left[\frac{\partial W}{\partial y''} \right]' \right\} + w' \frac{\partial W}{\partial y''} \Big\}_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} w^2 (A - F' + E'')\, dx$$

und da für die Grenzen w und w' gleich Null sind:

$$\int_{x_1}^{x_2} w^2 (A - F' + E'')\, dx$$

woraus man auf ein Maximum oder Minimum schliessen kann, je nachdem $A - F' + E''$ stets negativ oder stets positiv ist.

Wäre auch $A - F' + E'' = 0$, so wäre $V dx$ ein vollständiges Differential, und die Untersuchung müsste auf eine andere Art fortgeführt werden.

§. 11.

Untersuchung des speciellen Falles, wenn $V = \varphi(x, y, y', y'', y''')$ ist.

Die Glieder der zweiten Ordnung lassen sich in diesem Falle auf folgende drei Weisen darstellen.

(35)
$$\int_{x_1}^{x_2} \Big(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} w^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} w'^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2} w''^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2} w'''^2 +$$
$$+ 2 \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'} w w' + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y''} w w'' + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'''} w w''' +$$
$$+ 2 \frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y''} w' w'' + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y'''} w' w''' + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial y'' \partial y'''} w'' w''' \Big) dx$$

(36)
$$\Big| w \Big\{ \frac{\partial W}{\partial y'} - \Big[\frac{\partial W}{\partial y''}\Big]' + \Big[\frac{\partial W}{\partial y'''}\Big]'' \Big\} + w' \Big\{ \frac{\partial W}{\partial y''} - \Big[\frac{\partial W}{\partial y'''}\Big]' \Big\} + w'' \frac{\partial W}{\partial y'''} \Big]_{x_1}^{x_2} +$$
$$+ \int_{x_1}^{x_2} w \Big\{ \frac{\partial W}{\partial y} - \Big[\frac{\partial W}{\partial y'}\Big]' + \Big[\frac{\partial W}{\partial y''}\Big]'' - \Big[\frac{\partial W}{\partial y'''}\Big]''' \Big\} dx$$

(37)
$$\Big(v w^2 + v_1 w'^2 + v_2 w''^2 + 2 v_3 w w' + 2 v_4 w w'' + 2 v_5 w' w'' \Big)_{x_1}^{x_2} +$$
$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2} (w''' + \lambda_1 w'' + \lambda_2 w' + \lambda_3 w)^2 dx$$

die einander identisch gleich sind. Die in (36) vorkommende Grösse W ist gleich

$$W = \frac{\partial V}{\partial y} w + \frac{\partial V}{\partial y'} w' + \frac{\partial V}{\partial y''} w'' + \frac{\partial V}{\partial y'''} w'''$$

und die in (37) vorkommenden Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und $v, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$ haben zu genügen den Gleichungen (11), diese sind:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = v' + \lambda_3^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2}$$
$$\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} = v_1' + 2 v_3 + \lambda_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2}$$
$$\frac{\partial^2 V}{\partial y''^2} = v_2' + 2 v_5 + \lambda_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2}$$

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'} &= v + v_3' + \lambda_2 \lambda_3 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2} \\
\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y''} &= v_3 + v_4' + \lambda_1 \lambda_3 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2} \\
\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'''} &= v_4 + \lambda_3 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2} \\
\frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y''} &= v_1 + v_4 + v_5' + \lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2} \\
\frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y'''} &= v_5 + \lambda_3 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2} \\
\frac{\partial^2 V}{\partial y'' \partial y'''} &= v_2 + \lambda_1 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2}
\end{aligned}\right\} \tag{11}
$$

Wir nehmen an, dass die Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial y} - \left[\frac{\partial V}{\partial y'}\right]' + \left[\frac{\partial V}{\partial y''}\right]'' - \left[\frac{\partial V}{\partial y'''}\right]''' = 0$$

integrirt werden kann, und dass ihr Integrale

$$y = \varphi\,(x, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$$

sei, das Integral der Gleichung

$$\frac{\partial W}{\partial y} - \left[\frac{\partial W}{\partial y'}\right]' + \left[\frac{\partial W}{\partial y''}\right]'' - \left[\frac{\partial W}{\partial y'''}\right]''' = 0$$

die sich in entwickelter Gestalt, wenn man:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = A,\quad \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} = B,\quad \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2} = C,\quad \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2} = D,\quad \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'} = E,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y''} = F,\ \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'''} = G,\ \frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y''} = H,\ \frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y'''} = I,\ \frac{\partial^2 V}{\partial y'' \partial y'''} = K$$

setzt, auch so schreiben lässt:

$$
\begin{aligned}
&- Dw^{(6)} - 3\,D'w^{(5)} + (C - 3\,D'' - 2\,I - K')\,w'''' + \\
&+ (2\,C' - D''' - 4\,I' - 2\,K'')\,w''' + (-B + C'' + \\
&+ 2\,F - 3\,G' + H' - 3\,I'' - K''')\,w'' + (-B' + \\
&+ 2\,F - 3\,G'' + H'' - I''')\,w' + (A - E' + F'' - G''')\,w = 0
\end{aligned} \tag{38}
$$

hat dann folgende Werthe:

$$w = A_1 \frac{\partial y}{\partial a_1} + A_2 \frac{\partial y}{\partial a_2} + A_3 \frac{\partial y}{\partial a_3} + A_4 \frac{\partial y}{\partial a_4} + A_5 \frac{\partial y}{\partial a_5} + A_6 \frac{\partial y}{\partial a_6}$$

$$w = B_1 \frac{\partial y}{\partial a_1} + B_2 \frac{\partial y}{\partial a_2} + B_3 \frac{\partial y}{\partial a_3} + B_4 \frac{\partial y}{\partial a_4} + B_5 \frac{\partial y}{\partial a_5} + B_6 \frac{\partial y}{\partial a_6}$$

$$w = C_1 \frac{\partial y}{\partial a_1} + C_2 \frac{\partial y}{\partial a_2} + C_3 \frac{\partial y}{\partial a_3} + C_4 \frac{\partial y}{\partial a_4} + C_5 \frac{\partial y}{\partial a_5} + C_6 \frac{\partial y}{\partial a_6}$$

von denen wir das erste mit u_1 das zweite mit u_2 und das dritte mit u_3 bezeichnen. Wählen wir nun λ_1, λ_2 und λ_3 so, dass $w = u_1$, $w = u_2$, und $w = u_3$ die particulären Integrale der linearen Differentialgleichung

$$w''' + \lambda_1 w'' + \lambda_2 w' + \lambda_3 w = 0$$

werden, so haben wir demgemäss:

$$\begin{aligned} u_1''' + \lambda_1 u_1'' + \lambda_2 u_1' + \lambda_3 u_1 &= 0 \\ u_2''' + \lambda_1 u_2'' + \lambda_2 u_2' + \lambda_3 u_2 &= 0 \\ u_3''' + \lambda_1 u_3'' + \lambda_2 u_3' + \lambda_3 u_3 &= 0 \end{aligned}$$

woraus:

(39)

$$\lambda_1 = -\frac{u_1 u_2' u_3''' - u_1 u_3' u_2''' - u_2 u_1' u_3''' + u_2 u_3' u_1''' + u_3 u_1' u_2''' - u_3 u_2' u_1''}{u_1 u_2' u_3'' - u_1 u_3' u_2'' - u_2 u_1' u_3'' + u_2 u_3' u_1'' + u_3 u_1' u_2'' - u_3 u_2' u_1'''}$$

$$\lambda_2 = +\frac{u_1 u_2'' u_3''' - u_1 u_3'' u_2''' - u_2 u_1'' u_3''' + u_2 u_3'' u_1''' + u_3 u_1'' u_2''' - u_3 u_2'' u_1'''}{u_1 u_2' u_3'' - u_1 u_3' u_2'' - u_2 u_1' u_3'' + u_2 u_3' u_1'' + u_3 u_1' u_2'' - u_3 u_2' u_1''}$$

$$\lambda_3 = -\frac{u_1' u_2'' u_3''' - u_1' u_3'' u_2''' - u_2' u_1'' u_3''' + u_2' u_3'' u_1''' + u_3' u_1'' u_2''' - u_3' u_2'' u_1'''}{u_1 u_2' u_3'' - u_1 u_3' u_2'' - u_2 u_1' u_3'' + u_2 u_3' u_1'' + u_3 u_1' u_2'' - u_3 u_2' u_1'}.$$

folgen. Substituirt man diese Werthe in die Gleichungen (11), so findet man dann v, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5; diese sind:

$$\begin{aligned} v &= E - F' + (G - \lambda_3 D)'' + (\lambda_1 \lambda_3 D)' - \lambda_2 \lambda_3 D \\ v_1 &= H - G + \lambda_3 D - (I - \lambda_2 D)' - \lambda_1 \lambda_2 D \\ v_2 &= K - \lambda_1 D \\ v_3 &= F - (G - \lambda_3 D)' - \lambda_1 \lambda_3 D \\ v_4 &= G - \lambda_3 D \\ v_5 &= I - \lambda_2 D \end{aligned} \tag{40}$$

und jetzt bleibt uns nur noch nachzuweisen übrig, dass die gefundenen Werthe der Unbekannten den 3 Gleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= v' + \lambda_3{}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2} \\
\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} &= v_1{}' + 2\, v_3 + \lambda_2{}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2} \\
\frac{\partial^2 V}{\partial y''^2} &= v_2{}' + 2\, v_5 + \lambda_1{}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2}
\end{aligned} \tag{41}$$

identisch genügen, und zugleich mit der gehörigen Anzahl willkürlicher Constanten versehen sind. Da die Gleichungen (11) durch Elimination von $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ auf 6 Differentialgleichungen ersten Grades führen, so müssen in den Resultaten unserer Rechnung sechs willkürliche Constanten erscheinen.

Die Gleichungen (41) gehen, wenn man in ihnen statt $v, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$ ihre Werthe setzt, in folgende über:

$$\begin{aligned}
A &= E' - F'' + (G - \lambda_3 D)''' + (\lambda_1 \lambda_3 D)'' - (\lambda_2 \lambda_3 D)' + \lambda_3{}^2 D \\
B &= H' - G' + (\lambda_3 D)' - (I - \lambda_2 D)'' - (\lambda_1 \lambda_2 D)' + 2 F - \\
&\qquad - 2 (G - \lambda_3 D)' - 2 \lambda_1 \lambda_3 D + \lambda_2{}^2 D \\
C &= K' - (\lambda_1 D)' + 2 I - 2 \lambda_2 D + \lambda_1{}^2 D
\end{aligned} \tag{42}$$

und diese führen entwickelt und geordnet auf folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&\lambda_3''' D + 3 \lambda_3'' D' - D (\lambda_1 \lambda_3'' + \lambda_1'' \lambda_3) + 3 \lambda_3' D'' - \\
&\quad - 2D' (\lambda_1 \lambda_3' + \lambda_1' \lambda_3) + D (\lambda_2 \lambda_3' + \lambda_2' \lambda_3 - 2\lambda_1' \lambda_3) + \\
&\quad + \lambda_3 (D''' - \lambda_1 D'' + \lambda_2 D' - \lambda_3 D) = - A + E' - \\
&\quad - F'' + G'''
\end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned}
&\lambda_2'' D + 2 \lambda_2' D' + D (3 \lambda_3' - \lambda_1 \lambda_2' - \lambda_1' \lambda_2) + \lambda_2 D'' + \\
&\quad + D' (3 \lambda_3 - \lambda_1 \lambda_2) + D (\lambda_2{}^2 - 2 \lambda_1 \lambda_3) = B - 2 F + \\
&\quad + 3 G' - H' + I''
\end{aligned} \tag{44}$$

$$- \lambda_1' D - \lambda_1 D' + D (\lambda_1{}^2 - 2 \lambda_2) = C - 2 I - K' \tag{45}$$

Nun ist in diesen Gleichungen die Substitution für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und ihren Differentialquotienten durchzuführen. Wir sind aber hier gezwungen, um nicht gar zu weitläufige Entwicklungen zu haben, eine Reihe von Abkürzungen einzuführen.

Setzen wir nämlich:

$$
\begin{aligned}
u_1 u_2' u_3'' - u_1 u_3' u_2'' - u_2 u_1' u_3'' + u_2 u_3' u_1'' + u_3 u_1' u_2'' - u_3 u_2' u_1'' &= M_1\\
u_1 u_2' u_3''' - u_1 u_3' u_2''' - u_2 u_1' u_3''' + u_2 u_3' u_1''' + u_3 u_1' u_2''' - u_3 u_2' u_1''' &= M_2\\
u_1 u_2' u_3'''' - u_1 u_3' u_2'''' - u_2 u_1' u_3'''' + u_2 u_3'' u_1''' + u_3 u_1' u_2'''' - u_3 u_2' u_1'''' &= M_3\\
u_1 u_2'' u_3''' - u_1 u_3'' u_2''' - u_2 u_1'' u_3''' + u_2 u_3'' u_1''' + u_3 u_1'' u_2''' - u_3 u_2'' u_1''' &= M_4\\
u_1 u_2' u_3^{(5)} - u_1 u_3' u_2^{(5)} - u_2 u_1' u_3^{(5)} + u_2 u_3' u_1^{(5)} + u_3 u_1' u_2^{(5)} - u_3 u_2' u_1^{(5)} &= M_5\\
u_1 u_2'' u_3'''' - u_1 u_3'' u_2'''' - u_2 u_1'' u_3'''' + u_2 u_3'' u_1'''' + u_3 u_1'' u_2'''' - u_3 u_2'' u_1'''' &= M_6\\
u_1' u_2'' u_3''' - u_1' u_3'' u_2''' - u_2' u_1'' u_3''' + u_2' u_3'' u_1''' + u_3' u_1'' u_2''' - u_3' u_2'' u_1''' &= M_7\\
u_1 u_2' u_3^{(6)} - u_1 u_3' u_2^{(6)} - u_2 u_1' u_3^{(6)} + u_2 u_3' u_1^{(6)} + u_3 u_1' u_2^{(6)} - u_3 u_2' u_1^{(6)} &= M_8\\
u_1 u_2'' u_3^{(5)} - u_1 u_3'' u_2^{(5)} - u_2 u_1'' u_3^{(5)} + u_2 u_3'' u_1^{(5)} + u_3 u_1'' u_2^{(5)} - u_3 u_2'' u_1^{(5)} &= M_9\\
u_1 u_2''' u_3'''' - u_1 u_3''' u_2'''' - u_2 u_1''' u_3'''' + u_2 u_3''' u_1'''' + u_3 u_1''' u_2'''' - u_3 u_2''' u_1'''' &= M_{10}\\
u_1' u_2'' u_3'''' - u_1' u_3'' u_2'''' - u_2' u_1'' u_3'''' + u_2' u_3'' u_1'''' + u_3' u_1'' u_2'''' - u_3' u_2'' u_1'''' &= M_{11}\\
u_1 u_2' u_3^{(7)} - u_1 u_3' u_2^{(7)} - u_2 u_1' u_3^{(7)} + u_2 u_3' u_1^{(7)} + u_3 u_1' u_2^{(7)} - u_3 u_2' u_1^{(7)} &= M_{12}\\
u_1 u_2'' u_3^{(6)} - u_1 u_3'' u_2^{(6)} - u_2 u_1'' u_3^{(6)} + u_2 u_3'' u_1^{(6)} + u_3 u_1'' u_2^{(6)} - u_3 u_2'' u_1^{(6)} &= M_{13}\\
u_1 u_2''' u_3^{(5)} - u_1 u_3''' u_2^{(5)} - u_2 u_1''' u_3^{(5)} + u_2 u_3''' u_1^{(5)} + u_3 u_1''' u_2^{(5)} - u_3 u_2''' u_1^{(5)} &= M_{14}\\
u_1' u_2'' u_3^{(5)} - u_1' u_3'' u_2^{(5)} - u_2' u_1'' u_3^{(5)} + u_2' u_3'' u_1^{(5)} + u_3' u_1'' u_2^{(5)} - u_3' u_2'' u_1^{(5)} &= M_{15}\\
u_1' u_2''' u_3'''' - u_1' u_3''' u_2'''' - u_2' u_1''' u_3'''' + u_2' u_3''' u_1'''' + u_3' u_1''' u_2'''' - u_3' u_2''' u_1'''' &= M_{16}\\
u_1 u_2' u_3^{(8)} - u_1 u_3' u_2^{(8)} - u_2 u_1' u_3^{(8)} + u_2 u_3' u_1^{(8)} + u_3 u_1' u_2^{(8)} - u_3 u_2' u_1^{(8)} &= M_{17}\\
u_1 u_2'' u_3^{(7)} - u_1 u_3'' u_2^{(7)} - u_2 u_1'' u_3^{(7)} + u_2 u_3'' u_1^{(7)} + u_3 u_1'' u_2^{(7)} - u_3 u_2'' u_1^{(7)} &= M_{18}\\
u_1 u_2''' u_3^{(6)} - u_1 u_3''' u_2^{(6)} - u_2 u_1''' u_3^{(6)} + u_2 u_3''' u_1^{(6)} + u_3 u_1''' u_2^{(6)} - u_3 u_2''' u_1^{(6)} &= M_{19}\\
u_1 u_2'''' u_3^{(5)} - u_1 u_3'''' u_2^{(5)} - u_2 u_1'''' u_3^{(5)} + u_2 u_3'''' u_1^{(5)} + u_3 u_1'''' u_2^{(5)} - u_3 u_2'''' u_1^{(5)} &= M_{20}\\
u_1' u_2'' u_3^{(6)} - u_1' u_3'' u_2^{(6)} - u_2' u_1'' u_3^{(6)} + u_3' u_3'' u_1^{(6)} + u_3' u_1'' u_2^{(6)} - u_3' u_2'' u_1^{(6)} &= M_{21}\\
u_1' u_2''' u_3^{(5)} - u_1' u_3''' u_2^{(5)} - u_2' u_1''' u_3^{(5)} + u_2' u_3''' u_1^{(5)} + u_3' u_1''' u_2^{(5)} - u_3' u_2''' u_1^{(5)} &= M_{22}\\
u_1'' u_2''' u_3'''' - u_1'' u_3''' u_2'''' - u_2'' u_1''' u_3'''' + u_2'' u_3''' u_1'''' + u_3'' u_1''' u_2'''' - u_3'' u_2''' u_1'''' &= M_{23}
\end{aligned}
$$

so ist, wie man leicht sieht:

$$\begin{aligned}
M_1' &= M_2 \\
M_2' &= M_3 + M_4 \\
M_3' &= M_5 + M_6 \\
M_4' &= M_6 + M_7 \\
M_5' &= M_8 + M_9 \\
M_6' &= M_9 + M_{10} + M_{11} \\
M_7' &= M_{11} \\
M_8' &= M_{12} + M_{13} \\
M_9' &= M_{13} + M_{14} + M_{15} \\
M_{10}' &= M_{14} + M_{16} \\
M_{11}' &= M_{15} + M_{16} \\
M_{12}' &= M_{17} + M_{18} \\
M_{13}' &= M_{18} + M_{19} + M_{21} \\
M_{14}' &= M_{19} + M_{20} + M_{22} \\
M_{15}' &= M_{21} + M_{22} \\
M_{16}' &= M_{22} + M_{23}
\end{aligned}$$

und λ_1, λ_2, λ_3 und ihre Differentialquotienten haben folgende Werthe

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -\frac{M_2}{M_1} \\
\lambda_2 &= \frac{M_4}{M_1} \\
\lambda_3 &= -\frac{M_7}{M_1} \\
\lambda_1' &= -\frac{M_3}{M_1} - \lambda_2 + \lambda_1^2 \\
\lambda_2' &= \frac{M_6}{M_1} - \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_2 \\
\lambda_3' &= -\frac{M_{11}}{M_1} + \lambda_1 \lambda_3 \\
\lambda_1'' &= -\frac{M_5 + M_6}{M_1} - \lambda_1^3 + \lambda_1 \lambda_2 + 3 \lambda_1 \lambda_1' - \lambda_2' \\
\lambda_2'' &= \frac{M_9 + M_{10} + M_{11}}{M_1} + 2 \lambda_1 \lambda_2' + \lambda_1 \lambda_3 - \lambda_1^2 \lambda_2 - \lambda_3' + \lambda_1' \lambda_2 \\
\lambda_3'' &= -\frac{M_{15} + M_{16}}{M_1} - \lambda_1^2 \lambda_3 + 2 \lambda_1 \lambda_3' + \lambda_1' \lambda_3 \\
\lambda_3''' &= -\frac{M_{21} + 2M_{22} + M_{23}}{M_1} + 3 \lambda_1 \lambda_3'' + \lambda_1^3 \lambda_3 - 3 \lambda_1^2 \lambda_3' - 3 \lambda_1 \lambda_1' \lambda_3 + \\
&\quad + 3 \lambda_1' \lambda_3' + \lambda_1'' \lambda_3
\end{aligned}$$

Wird nun in der Gleichung (43) statt λ_3''' sein Werth gesetzt, so erhält man:

$$- D . \frac{M_{21} + 2 M_{22} + M_{23}}{M_1} + \lambda_3'' (3 D' + 2 \lambda_1 D) + 3 \lambda_3' D'' - - 2 D' (\lambda_1 \lambda_3' + \lambda_1' \lambda_3) + D (\lambda_1' \lambda_3' - 3 \lambda_1 \lambda_1' \lambda_3 - 3 \lambda_1^2 \lambda_3' + + \lambda_2 \lambda_3' + \lambda_2' \lambda_3) + \lambda_3 (D''' - \lambda_1 D'' + \lambda_2 D' - \lambda_3 D + \lambda_1^3 D) = = - A + E' - F'' + G'''$$

Setzt man hierein statt λ_3'' seinen Werth, so erhält man:

$$- D . \frac{M_{21} + 2 M_{22} + M_{23}}{M_1} - \frac{M_{15} + M_{16}}{M_1} (3 D' + 2 \lambda_1 D) + 3 \lambda_3' D'' + + D' (4 \lambda_1 \lambda_3' + \lambda_1' \lambda_3) + D (\lambda_1' \lambda_3' - \lambda_1 \lambda_1' \lambda_3 + \lambda_1^2 \lambda_3' + \lambda_2 \lambda_3' + + \lambda_2' \lambda_3) + \lambda_3 [D''' - \lambda_1 D'' + D' (\lambda_2 - 3 \lambda_1^2) - D (\lambda_3 + \lambda_1^3)] = = - A + E' - F'' + G'''$$

setzt man jetzt für λ_1', λ_2' und λ_3' ihre Werthe, so kömmt:

$$- D \left[\frac{M_{21} + 2 M_{22} + M_{23}}{M_1} + 2 \lambda_1 \frac{M_{15} + M_{16}}{M_1} + 2 \lambda_1^2 \frac{M_{11}}{M_1} - \frac{M_3 M_{11}}{M_1^2} - - \lambda_3 \frac{M_6}{M_1}\right] - D' \left[3 \frac{M_{15} + M_{16}}{M_1} + 4 \lambda_1 \frac{M_{11}}{M_1} + \lambda_3 \frac{M_3}{M_1}\right] - 3 D'' \frac{M_{11}}{M_1} + + \lambda_3 [D''' + 2 \lambda_1 D'' + 2 \lambda_1^2 D' + D (2 \lambda_1 \lambda_2 - 2 \lambda_3)] = = - A + E' - F'' + G'''$$

und setzt man endlich noch für λ_1, λ_2, λ_3 ihre Werthe, so erhält man wenn man die ganze Gleichung mit M_1^2 multiplicirt und ordnet:

$$- D''' M_1 M_7 + D'' (2 M_2 M_7 - 3 M_1 M_{11}) + D' (4 M_2 M_{11} + + M_3 M_7 - 3 M_1 M_{15} - 3 M_1 M_{16} - 2 \frac{M_2^2 M_7}{M_1}) + D (2 M_2 M_{15} + + 2 M_2 M_{16} - M_1 M_{21} - 2 M_1 M_{22} - M_1 M_{23} + M_3 M_{11} - - 2 \frac{M_2^2 M_{11}}{M_1} - M_6 M_7 - 2 M_7^2 + 2 \frac{M_2 M_4 M_7}{M_1}) = = M_1^2 (- A + E' - F'' + G''') \tag{46}$$

Verfährt man mit der Gleichung (44) eben so, so erhält man, wenn man zuerst für λ_2'' seinen Werth setzt:

$$D \frac{M_9 + M_{10} + M_{11}}{M_1} + \lambda_2 D'' + D' (3 \lambda_3 + 2 \lambda_2' - \lambda_1 \lambda_2) + + D (\lambda_1 \lambda_2' - \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2^2 - \lambda_1^2 \lambda_2 + 2 \lambda_3') = B - 2 F + + 3 G' - H'' + I'''$$

wenn man dann für λ_2' und λ_3' ihre Werthe setzt:

$$D\left(\frac{M_9+M_{10}-M_{11}}{M_1}+\lambda_1\frac{M_6}{M_1}\right)+2\,D'\frac{M_6}{M_1}+\lambda_2 D''+D'(\lambda_3+\lambda_1\lambda_2)+$$
$$+\lambda_2^2 D=B-2\,F+3\,G'-H'+I''$$

und wenn man nun noch für λ_1, λ_2, λ_3 ihre Werthe setzt, und die Gleichung dann von Brüchen befreiet

$$\begin{aligned}&M_1\,M_4\,D''+D'\,(2\,M_1\,M_6-M_1\,M_7-M_2\,M_4)+\\&+D\,(M_1\,M_9+M_1\,M_{10}-M_1\,M_{11}-M_2\,M_6+M_4^2)=\\&=M_1^2\,(B-2\,F+3\,G'-H'+I'')\end{aligned}\tag{47}$$

Endlich erhält man für die Gleichung (45), wenn man für λ'_1 seinen Werth setzt:

$$\frac{M_3}{M_1}D-\lambda_2\,D-\lambda_1\,D'=C-2\,I-K'$$

und wenn man noch für λ_1 und λ_2 ihre Werthe setzt und ordnet:

$$M_2\,D'+D\,(M_3-M_4)=M_1\,(C-2\,I-K')\tag{48}$$

Die drei Gleichungen (43), (44) und (45) gehen daher in folgende drei Gleichungen über:

$$\begin{aligned}&-D'''\,M_1\,M_7+D''\,(2\,M_2\,M_7-3\,M_1\,M_{11})+D'\,(4\,M_2\,M_{11}+\\&+M_3\,M_7-3\,M_1\,M_{15}-3\,M_1\,M_{16}-2\frac{M_2^2\,M_7}{M_1})+D\,(2\,M_2\,M_{15}+\\&+2\,M_2\,M_{16}-M_1\,M_{21}-2\,M_1\,M_{22}-M_1\,M_{23}+M_3\,M_{11}-\\&-2\,\frac{M_2^2\,M_{11}}{M_1}-M_6\,M_7-2\,M_7^2+2\,\frac{M_2\,M_4\,M_7}{M_1})=\\&=M_1^2\,(-A+E'-F''+G''')\end{aligned}\tag{46}$$

$$\begin{aligned}&M_1\,M_4\,D''+D'\,(2\,M_1\,M_6-M_1\,M_7-M_2\,M_4)+D\,(M_1\,M_9+\\&+M_1\,M_{10}-M_1\,M_{11}-M_2\,M_6+M_4^2)=M_1^2\,(B-2\,F+\\&+3\,G'-H'+I'')\end{aligned}\tag{47}$$

$$M_2\,D'+D\,(M_3-M_4)=M_1\,(C-2\,I-K')\tag{48}$$

Die zwei ersten dieser 3 Gleichungen sind einer bedeutenden Reduction fähig, man hat zu dem Behufe nur statt $-A+E'-F''+G'''$ und $B-2F+3G'-H'+I''$ ihre, ihnen identisch gleichen Werthe zu setzen, die wir auf folgende Weise erhalten:

Setzt man in der Gleichung (38) statt w die drei Werthe u_1 u_2 oder u_3, so erhält man stets eine identische Gleichung, weil u_1

u_2 und u_3 die Integrale dieser Gleichung (38) sind, man hat daher folgende identische Gleichungen:

$$-D\,u_1^{(6)} - 3\,D'\,u_1^{(5)} + u_1^{(4)}\,(C - 3\,D'' - 2\,I - K') + u_1'''\,(2\,C' - D''' - 4\,I' - 2\,K'') + u_1''\,(-B + C'' + 2\,F - 3\,G' + H' - 3\,I'' - K''') + u_1'\,(-B' + 2\,F' - 3\,G'' + H'' - I''') + u_1\,(A - E' + F'' - G''') = 0$$

$$-D\,u_2^{(6)} - 3\,D'\,u_2^{(5)} + u_2^{(4)}\,(C - 3\,D'' - 2\,I - K') + u_2'''\,(2\,C' - D''' - 4\,I' - 2\,K'') + u_2''\,(-B + C'' + 2\,F - 3\,G' + H' - 3\,I'' - K''') + u_2'\,(-B' + 2\,F' - 3\,G'' - H'' - I''') + u_2\,(A - E' + F'' - G''') = 0$$

$$-D\,u_3^{(6)} - 3\,D'\,u_3^{(5)} + u_3^{(4)}\,(C - 3\,D'' - 2\,I - K') + u_3'''\,(2\,C' - D''' - 4\,I' - 2\,K'') + u_3''\,(-B + C'' + 2\,F - 3\,G' + H' - 3\,I'' - K''') + u_3'\,(-B' + 2\,F' - 3\,G'' + H'' - I''') + u_3\,(A - E' + F'' - G''') = 0$$

Multiplicirt man die erste derselben mit $u_2'\,u_3'' - u_3'\,u_2''$, die zweite mit $u_3'\,u_1'' - u_1'\,u_3''$ die dritte mit $u_1'\,u_2'' - u_2'\,u_1''$ und addirt man sämmtliche so erhaltene Gleichungen, so hat man:

$$-D\,M_{21} - 3\,D'\,M_{15} + M_{11}\,(C - 3\,D'' - 2\,I - K') + M_7\,(2\,C' - D''' - 4\,I' - 2\,K'') + M_1\,(A - E' + F'' - G''') = 0 \tag{49}$$

multiplicirt man hingegen die drei Gleichungen der Reihe nach mit

$$u_3\,u_2'' - u_2\,u_3'' \quad u_1\,u_3'' - u_3\,u_1'' \quad u_2\,u_1'' - u_1\,u_2''$$

und addirt sie alsdann, so erhält man:

$$-D\,M_{13} - 3\,D'\,M_9 + M_6\,(C - 3\,D'' - 2\,I - K') + M_4\,(2\,C' - D''' - 4\,I' - 2\,K'') + M_1\,(B' - 2\,F' + 3\,G'' - H'' + I''') = 0 \tag{50}$$

multiplicirt man endlich dieselben drei Gleichungen mit

$$u_2'\,u_3 - u_3'\,u_2 \quad u_3\,u_1' - u_1\,u_3' \quad u_1\,u'_2 - u_2\,u'_1$$

und addirt sie, so hat man

$$-D\,M_8 - 3\,D'\,M_5 + M_3\,(C - 3\,D'' - 2\,I - K') + M_2\,(2\,C' - D''' - 4\,I' - 2\,K'') + M_1\,(-B + C'' + 2\,F - 3\,G' + H' - 3\,I'' - K''') = 0 \tag{51}$$

Diese drei Gleichungen (49), (50) und (51) sind offenbar identische Gleichungen, aus der ersten derselben folgt:

$$M_1\,(-A+E'-F'+G''') = -D\,M_{21} - 3\,D'\,M_{15} + M_{11}\,(C-3\,D''-2\,I-K') + M_7\,(2\,C'-D'''-4\,I'-2\,K'')$$

und dies in (46) gesetzt und reducirt gibt:

$$\begin{aligned} &2\,M_2\,M_7\,D'' + D'\,(4\,M_2\,M_{11} + M_3\,M_7 - 3\,M_1\,M_{16} - \\ &- 2\,\frac{M_2^2\,M_7}{M_1}) + D\,(2\,M_2\,M_{15} + 2\,M_2\,M_{16} - 2\,M_1\,M_{22} - \\ &- M_1\,M_{23} + M_3\,M_{11} - 2\,\frac{M_2^2\,M_{11}}{M_1} - M_6\,M_7 - 2\,M_7^2 + \\ &+ 2\,\frac{M_2\,M_4\,M_7}{M_1}) = M_1\,M_{11}\,(C-2\,I-K') + \\ &+ 2\,M_1\,M_7\,(C'-2\,I'-K'') \end{aligned} \tag{52}$$

Versuchen wir, um diese Gleichung noch weiter zu vereinfachen, statt $C - 2I - K'$ seinen aus (48) folgenden Werth zu setzen, so hat man, da

$$M_1\,(C-2\,I-K') = M_2\,D' + D\,(M_3 - M_4) \tag{48}$$

ist, wenn man diese Gleichung differenzirt:

$$\begin{aligned} M_1\,(C'-2\,I'-K'') + M_2\,(C-2\,I-K') = M_2\,D'' + \\ + 2\,M_3\,D' + D\,(M_5 - M_7) \end{aligned} \tag{53}$$

Bringt man nun zuerst mittelst dieser Gleichung aus (52) das Glied $C' - 2I' - K''$ weg, so hat man:

$$\begin{aligned} &D'\,(4\,M_2\,M_{11} - 3\,M_1\,M_{16} - 3\,M_3\,M_7 - 2\,\frac{M_2^2\,M_7}{M_1}) + D\,(2\,M_{12}\,M_{15} + \\ &+ 2\,M_2\,M_{16} - 2\,M_1\,M_{22} - M_1\,M_{23} + M_3\,M_{11} - M_6\,M_7 - 2\,M_5\,M_7 - \\ &- 2\,\frac{M_2^2\,M_{11}}{M_1} + 2\,\frac{M_2\,M_4\,M_7}{M_1}) = (M_1\,M_{11} - 2\,M_2\,M_7)\,(C-2\,I-K') \end{aligned}$$

und bringt man hieraus mittelst der Gleichung (48) das Glied $C - 2I - K'$ weg, und befreiet man dann die Gleichung von Brüchen, so hat man:

$$\begin{aligned} &3\,M_1\,D'\,(M_1M_{16} - M_2M_{11} + M_3M_7) + D\,[2\,M_1\,(M_1M_{22} - \\ &- M_2M_{15} + M_5M_7) + M_1\,(M_1M_{23} - M_4M_{11} + M_6M_7) - \\ &- 2\,M_2\,(M_1M_{16} - M_2M_{11} + M_3M_7)] = 0 \end{aligned} \tag{54}$$

Uns bleibt nun nichts anders übrig, als die hier erscheinenden Ausdrücke

$$\begin{gathered} M_1M_{16} - M_2M_{11} + M_3M_7 \\ M_1M_{22} - M_2M_{15} + M_5M_7 \\ M_1M_{23} - M_4M_{11} + M_6M_7 \end{gathered}$$

wirklich zu berechnen. Wir haben diese mühsame Operation durchgeführt, und haben gefunden, dass jeder der drei Ausdrücke aus 108 Gliedern besteht, die sich paarweise aufheben, es ist nämlich:

$$\begin{aligned} & M_1M_{16} - M_2M_{11} + M_3M_7 = \\ & (u_1u_2'u_3'' - u_1u_3'u_2'' - u_2u_1'u_3'' + u_2u_3'u_1'' + u_3u_1'u_2'' - u_3u_2'u_1'') . \\ & (u_1'u_2'''u_3'''' - u_1'u_3'''u_2'''' - u_2'u_1'''u_3'''' + u_2'u_3'''u_1'''' + u_3'u_1'''u_2'''' - \\ & - u_3'u_2'''u_1'''') - (u_1u_2'u_3''' - u_1u_3'u_2''' - u_2u_1'u_3''' + u_2u_3'u_1''' + \\ & + u_3u_1'u_2''' - u_3u_2'u_1''') \cdot (u_1'u_2''u_3'''' - u_1'u_3''u_2'''' - u_2'u_1''u_3'''' + \\ & + u_2'u_3''u_1'''' + u_3'u_1''u_2'''' - u_3'u_2''u_1'''') + (u_1u_2'u_3'''' - u_1u_3'u_2'''' - \\ & - u_2u'_1u_3'''' + u_2u_3'u_1'''' + u_3u_1'u_2'''' - u_3u_2'u_1'''') \cdot (u_1'u_2''u_3''' - \\ & - u_1u_3''u_2''' - u_2'u_1''u_3''' + u_2'u_3''u_1''' + u_3'u_1''u_2''' - u_3'u_2''u_1''') = 0 \end{aligned}$$

Setzt man in dieser Gleichung überall $u^{(5)}$ statt u'''', so erhält man offenbar wieder eine identische Gleichung, und die ist:

$$M_1M_{22} - M_2M_{15} + M_5M_7 = 0$$

und verwechselt man in derselben Gleichung u' mit u'' und u'' mit u', so erhält man

$$- M_1M_{23} + M_4M_{11} - M_6M_7 = 0$$

also ist die Gleichung (54) identisch erfüllt.

Man kann daher folgenden Satz aussprechen: Wenn die in (39) angegebenen Werthe von λ der Gleichung (45) genügen, so genügen sie gewiss auch der Gleichung (43). Ich habe gesucht, dieses noch deutlicher ersichtlich zu machen, und bin dahin gelangt die Gleichung (52), welche mit der Gleichung (43) identisch ist, in folgender Form aufzustellen:

(55)
$$\begin{aligned} & 2\,'M_7\,[M_1\,(C - 2J - K') - M_2D' - D\,(M_3 - M_4)]' + \\ & + \left(M_{11} - \frac{2M_2M_7}{M_1}\right)[M_1\,(C - 2J - K') - M_2D' - D\,(M_3 - M_4)] = 0 \end{aligned}$$

Zwischen den verschiedenen M finden noch mehr Gleichungen Statt, als die oben angeführten; da sie uns im Verlauf der Rechnung von Nutzen sein werden, so wollen wir sie hier, mit Wiederholung der schon genannten drei, anführen:

$$
\begin{aligned}
M_1\, M_{10} - M_2\, M_6 + M_3\, M_4 &= 0\\
M_1\, M_{14} - M_2\, M_9 + M_4\, M_5 &= 0\\
M_1\, M_{16} - M_2\, M_{11} + M_3\, M_7 &= 0\\
M_1\, M_{19} - M_2\, M_{13} + M_4\, M_8 &= 0\\
M_1\, M_{20} - M_3\, M_9 + M_5\, M_6 &= 0\\
M_1\, M_{22} - M_2\, M_{15} + M_5\, M_7 &= 0\\
M_1\, M_{23} - M_4\, M_{11} + M_6\, M_7 &= 0\\
M_2\, M_{20} - M_3\, M_{14} + M_5\, M_{10} &= 0\\
M_2\, M_{23} - M_4\, M_{16} + M_7\, M_{10} &= 0\\
M_3\, M_{23} - M_6\, M_{16} + M_{10}\, M_{11} &= 0\\
M_4\, M_{20} - M_6\, M_{14} + M_9\, M_{10} &= 0
\end{aligned}
$$

Behandeln wir auf dieselbe Weise die Gleichung (47). Aus (51) folgt:

$$
\begin{aligned}
M_1\,(B - 2F + 3G' - H' + I') = - D M_8 - 3D'\, M_5 + (C -\\
- 3D'' - 2I - K')\, M_3 + (2C' - D''' - 4I' - 2K'')\, M_2 + (C'' -\\
- 2I'' - K''')\, M_1
\end{aligned}
$$

und dies in (47) gesetzt, gibt:

$$
\begin{aligned}
M_1\, M_2\, D''' + D''\,(M_1\, M_4 + 3 M_1\, M_3) + D'\,(2 M_1 M_6 - M_1\, M_7 -\\
- M_2\, M_4 + 3 M_1\, M_5) + D\,(M_1\, M_8 + M_1\, M_9 + M_1 M_{10} - M_1\, M_{11} -\\
M_2\, M_6 + M^2{}_4) = (C - 2I - K')\, M_1\, M_3 + 2\,(C' - 2I' - K'') -\\
- M_1\, M_2 + (C'' - 2I'' - K''')\, M^2{}_1
\end{aligned}
\tag{56}
$$

Versucht man auch hier, um diese Gleichung zu vereinfachen, statt $C - 2I - K'$ seinen aus (48) folgenden Werth zu setzen, so hat man, da

$$M_1\,(C \quad 2I - K') \qquad M_2\, D' + D\,(M_3 - M_4) \tag{48}$$

$$
\begin{aligned}
M_1\,(C' - 2I' - K'') + M_2\,(C - 2I - K') = M_2\, D'' +\\
+ 2 M_3\, D' + D\,(M_5 - M_7)
\end{aligned}
\tag{53}
$$

ist, die letzte Gleichung nochmals differenzirend

$$
\begin{aligned}
M_1\,(C'' - 2I'' - K''') + 2 M_2\,(C' - 2I' - K'') +\\
(M_3 + M_4)\,(C - 2I - K')\\
= D\,(M_8 + M_9 - M_{11}) + D'\,(3 M_5 + 2 M_6 - M_7) +\\
+ D''\,(3 M_3 + M_4) + M_2\, D'''
\end{aligned}
\tag{57}
$$

Bringt man aus (56) mittelst der eben entwickelten Gleichung das Glied $C'' - 2I'' - K'''$ weg, so hat man:

$$- D' M_2 M_4 + D (M_1 M_{10} - M_2 M_6 + M_4{}^2) = -$$
$$- M_1 M_4 (C - 2I - K')$$

und bringt man aus dieser Gleichung mittelst der Gleichung (48) das Glied $C - 2I - K'$ weg, so erhält man:

$$D (M_1 M_{10} - M_2 M_6 + M_3 M_4) = 0$$

und dies findet wirklich identisch Statt.

Man kann daher jetzt auch sagen: Die beiden Gleichungen (43) und (44) oder die aus ihnen abgeleiteten (46) und (47) werden befriedigt, wenn nur die Gleichung (45) oder die aus ihr hervorgehende (48) befriedigt wird.

Zugleich lässt sich bemerken, dass man der Gleichung (56) folgende Form geben könne:

(58) $$M_1 [M_1 (C - 2I - K') - M_2 D' - D (M_3 - M_4)]'' -$$
$$- M_4 [M_1 (C - 2I - K') - M_2 D' - D (M_3 - M_4)] = 0$$

Um den Faden unserer Rechnung nicht zu verlieren, wollen wir erwähnen, dass unsere Untersuchung, ob nämlich die in (39) und (40) aufgestellten Werthe von

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, v, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$$

den Gleichungen (41) genügen, uns auf folgende drei Gleichungen führte:

(55) $$2 M_7 [M_1 (C - 2I - K') - M_2 D' - D (M_3 - M_4)]' + (M_{11}$$
$$- \frac{2 M_2 M_7}{M_1}) [M_1 (C - 2I - K') - M_2 D' - D (M_3 - M_4) = 0$$

(58) $$M_1 [M_1 (C - 2I - K') - M_2 D' - D (M_3 - M_4)]'' -$$
$$- M_4 [M_1 (C - 2I - K') - M_2 D' - D (M_3 - M_4)] = 0$$

(48) $$M_1 (C - 2I - K') - M_2 D' - D (M_3 - M_4) = 0$$

die der Reihe nach den Gleichungen (41) identisch sind. Wenn sich daher erweisen lässt, dass die Gleichung (48) identisch stattfindet (etwa dadurch, dass man zwischen den in ihr eintretenden

Constanten gewisse Beziehungen statuirt, so finden auch die Gleichungen (55) und (58) und somit auch die Gleichungen (41) identisch Statt.

Suchen wir nun aus den zwei Gleichungen (50) und (51) eine dritte abzuleiten, in der nicht mehr $B - 2F + 3G' - H' + I''$ erscheint. Zu dem Behufe differenzire man (51), dies gibt:

$$
\begin{aligned}
-M_2 D'''' - D'''(4 M_3 + M_4) - D''(6 M_5 + 3 M_6) - D'(4 M_8 + \\
+ 3M_9) - D(M_{12} + M_{13}) + (M_5 + M_6)(C - 2I - K') + \\
+ (3 M_3 + 2 M_4)(C' - 2I' - K'') + 2 M_2 (C'' - \\
- 2I'' - K''') + M_1 (-B' + C''' + 2F - 3G'' + H'' - \\
- 3I''' - K'''') + M_2(-B + C'' + 2F - 3G' + H' - \\
- 3I'' - K''') = 0
\end{aligned}
$$

addirt man hinzu (50) so hat man:

$$
\begin{aligned}
-M_2 D'''' - D'''(4 M_3 + 2 M_4) - D''(6 M_5 + 6 M_6) - D'(4M_8 + \\
+ 6M_9) - D(M_{12} + 2 M_{13}) + (M_5 + 2 M_6)(C - 2I - K') + \\
+ (3 M_3 + 4 M_4)(C' - 2I' - K'') + 2 M_2 (C'' - \\
- 2I'' - K''') + M_1 (C''' - 2I''' - K'''') + \\
+ M_2(-B + C'' + 2F - 3G' + H' - 3I'' - K''') = 0
\end{aligned}
$$

Multiplicirt man jetzt diese Gleichung mit M_1, (51) mit M_2 und subtrahirt dann beide von einander, so hat man:

$$
\begin{aligned}
-M_1 M_2 D'''' + D'''(-4 M_1 M_3 - 2 M_1 M_4 + M_2^2) + \\
+ D''(-6 M_1 M_5 - 6 M_1 M_6 + 3 M_2 M_3) + D'(-6 M_1 M_9 - \\
- 4M_1 M_8 + 3 M_2 M_5) + D(-M_1 M_{12} - 2M_1 M_{13} + \\
+ M_2 M_8) + (M_1 M_5 + 2 M_1 M_6 - M_2 M_3)(C - 2I - K') + \\
+ (3 M_1 M_3 + 4 M_1 M_4 - 2 M_2^2)(C' - 2I' - K'') + \\
+ 2 M_1 M_2 (C'' - 2I'' - K''') + M_1^2 (C''' - \\
- 2I''' - K'''') = 0
\end{aligned}
$$

oder anders geschrieben:

$$
\begin{aligned}
M_1 [M_1 (C - 2I - K') - M_2 D' - D(M_3 - M_4)]''' - \\
- M_2 [M_1 (C - 2I - K') - M_2 D' - D(M_3 - M_4)]'' + \\
+ M_4 [M_1 (C - 2I - K') - M_2 D' - D(M_3 - M_4)]' - \\
- M_7 [M_1 (C - 2I - K') - M_2 D' - D(M_3 - M_4)] = 0
\end{aligned}
\tag{59}
$$

Setzen wir der Kürze halber

$$M_1\,(C - 2\,I - K') - M_2\,D' - D\,(M_3 - M_4) = u$$

so lässt sich die Gleichung (59) so darstellen:

$$M_1\,u''' - M_2\,u'' + M_4\,u' - M_7\,u = 0$$

oder

$$u''' - \frac{M_2}{M_1}\,u'' + \frac{M_4}{M_1}\,u' - \frac{M_7}{M_1}\,u = 0$$

oder endlich, was dasselbe ist, in folgender Form:

$$u''' + \lambda_1\,u'' + \lambda_2\,u' + \lambda_3\,u = 0$$

Vergleicht man nun diese Gleichung mit der Gleichung

$$w''' + \lambda_1\,w'' + \lambda_2\,w' + \lambda_3\,w = 0$$

so sieht man, dass u die drei Auflösungen:

$$A_1\,\frac{\partial y}{\partial a_1} + A_2\,\frac{\partial y}{\partial a_2} + A_3\,\frac{\partial y}{\partial a_3} + A_4\,\frac{\partial y}{\partial a_4} + A_5\,\frac{\partial y}{\partial a_5} + A_6\,\frac{\partial y}{\partial a_6}$$

$$B_1\,\frac{\partial y}{\partial a_1} + B_2\,\frac{\partial y}{\partial a_2} + B_3\,\frac{\partial y}{\partial a_3} + B_4\,\frac{\partial y}{\partial a_4} + B_5\,\frac{\partial y}{\partial a_5} + B_6\,\frac{\partial y}{\partial a_6}$$

$$C_1\,\frac{\partial y}{\partial a_1} + C_2\,\frac{\partial y}{\partial a_2} + C_3\,\frac{\partial y}{\partial a_3} + C_4\,\frac{\partial y}{\partial a_4} + C_5\,\frac{\partial y}{\partial a_5} + C_6\,\frac{\partial y}{\partial a_6}$$

hat. Wie lässt sich nun denken, dass der Ausdruck:

$$M_1\,(C - 2\,I - K') - M_2\,D' - D\,(M_3 - M_4)$$

in welchem die Coëfficienten A, B, C determinantenartig verbunden vorkommen, identisch gleich sei, einem der drei angeführten Ausdrücke, wo die Coëfficienten A, B oder C alleinstehend und in linearer Form auftreten?

Wir sind daher gezwungen anzunehmen, dass

(48) $$M_1\,(C-2\,I-K') - M_2\,D'-D\,(M_3-M_4) = 0$$

identisch stattfinde, denn nur unter dieser Voraussetzung lässt sich aus (59) kein weiterer Schluss ziehen.

Wir wollen nun zur wirklichen Berechnung von $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ schreiten. Es ist:

$$u_1 = A_1\,\frac{\partial y}{\partial a_1} + A_2\,\frac{\partial y}{\partial a_2} + A_3\,\frac{\partial y}{\partial a_3} + A_4\,\frac{\partial y}{\partial a_4} + A_5\,\frac{\partial y}{\partial a_5} + A_6\,\frac{\partial y}{\partial a_6}$$

$$u_1' = A_1\,\frac{\partial y'}{\partial a_1} + A_2\,\frac{\partial y'}{\partial a_2} + A_3\,\frac{\partial y'}{\partial a_3} + A_4\,\frac{\partial y'}{\partial a_4} + A_5\,\frac{\partial y'}{\partial a_5} + A_6\,\frac{\partial y'}{\partial a_6}$$

$$u_1'' = A_1\,\frac{\partial y''}{\partial a_1} + A_2\,\frac{\partial y''}{\partial a_2} + A_3\,\frac{\partial y''}{\partial a_3} + A_4\,\frac{\partial y''}{\partial a_4} + A_5\,\frac{\partial y''}{\partial a_5} + A_6\,\frac{\partial y''}{\partial a_6}$$

$$u_1''' = A_1\,\frac{\partial y'''}{\partial a_1} + A_2\,\frac{\partial y'''}{\partial a_2} + A_3\,\frac{\partial y'''}{\partial a_3} + A_4\,\frac{\partial y'''}{\partial a_4} + A_5\,\frac{\partial y'''}{\partial a_5} + A_6\,\frac{\partial y'''}{\partial a_6}$$

$$u_2 = B_1 \frac{\partial y}{\partial a_1} + B_2 \frac{\partial y}{\partial a_2} + B_3 \frac{\partial y}{\partial a_3} + B_4 \frac{\partial y}{\partial a_4} + B_5 \frac{\partial y}{\partial a_5} + B_6 \frac{\partial y}{\partial a_6}$$

$$u_2' = B_1 \frac{\partial y'}{\partial a_1} + B_2 \frac{\partial y'}{\partial a_2} + B_3 \frac{\partial y'}{\partial a_3} + B_4 \frac{\partial y'}{\partial a_4} + B_5 \frac{\partial y'}{\partial a_5} + B_6 \frac{\partial y'}{\partial a_6}$$

$$u_2'' = B \frac{\partial y''}{\partial a_1} + B_2 \frac{\partial y''}{\partial a_2} + B_3 \frac{\partial y''}{\partial a_3} + B_4 \frac{\partial y''}{\partial a_4} + B_5 \frac{\partial y''}{\partial a_5} + B_6 \frac{\partial y''}{\partial a_6}$$

$$u_2''' = B_1 \frac{\partial y'''}{\partial a_1} + B_2 \frac{\partial y'''}{\partial a_2} + B_3 \frac{\partial y'''}{\partial a_3} + B_4 \frac{\partial y'''}{\partial a_4} + B_5 \frac{\partial y'''}{\partial a_5} + B_6 \frac{\partial y'''}{\partial a_6}$$

$$u_3 = C_1 \frac{\partial y}{\partial a_1} + C_2 \frac{\partial y}{\partial a_2} + C_3 \frac{\partial y}{\partial a_3} + C_4 \frac{\partial y}{\partial a_4} + C_5 \frac{\partial y}{\partial a_5} + C_6 \frac{\partial y}{\partial a_6}$$

$$u_3' = C_1 \frac{\partial y'}{\partial a_1} + C_2 \frac{\partial y'}{\partial a_2} + C_3 \frac{\partial y'}{\partial a_3} + C_4 \frac{\partial y'}{\partial a_4} + C_5 \frac{\partial y'}{\partial a_5} + C_6 \frac{\partial y'}{\partial a_6}$$

$$u_3'' = C_1 \frac{\partial y''}{\partial a_1} + C_2 \frac{\partial y''}{\partial a_2} + C_3 \frac{\partial y''}{\partial a_3} + C_4 \frac{\partial y''}{\partial a_4} + C_5 \frac{\partial y''}{\partial a_5} + C_6 \frac{\partial y''}{\partial a_6}$$

$$u_3''' = C_1 \frac{\partial y'''}{\partial a_1} + C_2 \frac{\partial y'''}{\partial a_2} + C_3 \frac{\partial y'''}{\partial a_3} + C_4 \frac{\partial y'''}{\partial a_4} + C_5 \frac{\partial y'''}{\partial a_5} + C_6 \frac{\partial y'''}{\partial a_6}$$

Setzt man der Kürze halber:

$$A_1 B_2 C_3 - A_1 B_3 C_2 - A_2 B_1 C_3 + A_2 B_3 C_1 + A_3 B_1 C_2 - A_3 B_2 C_1 = N_1$$
$$A_1 B_2 C_4 - A_1 B_4 C_2 - A_2 B_1 C_4 + A_2 B_4 C_1 + A_4 B_1 C_2 - A_4 B_2 C_1 = N_2$$
$$A_1 B_2 C_5 - A_1 B_5 C_2 - A_2 B_1 C_5 + A_2 B_5 C_2 + A_5 B_1 C_2 - A_5 B_2 C_1 = N_3$$
$$A_1 B_2 C_6 - A_1 B_6 C_2 - A_2 B_1 C_6 + A_2 B_6 C_1 + A_6 B_1 C_2 - A_6 B_2 C_1 = N_4$$
$$A_1 B_3 C_4 - A_1 B_4 C_3 - A_3 B_1 C_4 + A_3 B_4 C_1 + A_4 B_1 C_3 - A_4 B_3 C_1 = N_5$$
$$A_1 B_3 C_5 - A_1 B_5 C_3 - A_3 B_1 C_5 + A_3 B_5 C_1 + A_5 B_1 C_3 - A_5 B_3 C_1 = N_6$$
$$A_1 B_3 C_6 - A_1 B_6 C_3 - A_3 B_1 C_6 + A_3 B_6 C_1 + A_6 B_1 C_3 - A_6 B_3 C_1 = N_7$$
$$A_1 B_4 C_5 - A_1 B_5 C_4 - A_4 B_1 C_5 + A_4 B_5 C_1 + A_5 B_1 C_4 - A_5 B_4 C_1 = N_8$$
$$A_1 B_4 C_6 - A_1 B_6 C_4 - A_4 B_1 C_6 + A_4 B_6 C_1 + A_6 B_1 C_4 - A_6 B_4 C_1 = N_9$$
$$A_1 B_5 C_6 - A_1 B_6 C_5 - A_5 B_1 C_6 + A_5 B_6 C_1 + A_6 B_1 C_5 - A_6 B_5 C_1 = N_{10}$$
$$A_2 B_3 C_4 - A_2 B_4 C_3 - A_3 B_2 C_4 + A_3 B_4 C_2 + A_4 B_2 C_3 - A_4 B_3 C_2 = N_{11}$$
$$A_2 B_3 C_5 - A_2 B_5 C_3 - A_3 B_2 C_5 + A_3 B_5 C_2 + A_5 B_2 C_3 - A_5 B_3 C_2 = N_{12}$$
$$A_2 B_3 C_6 - A_2 B_6 C_3 - A_3 B_2 C_6 + A_3 B_6 C_2 + A_6 B_2 C_3 - A_6 B_3 C_2 = N_{13}$$
$$A_2 B_4 C_5 - A_2 B_5 C_4 - A_4 B_2 C_5 + A_4 B_5 C_2 + A_5 B_2 C_4 - A_5 B_4 C_2 = N_{14}$$
$$A_2 B_4 C_6 - A_2 B_6 C_4 - A_4 B_2 C_6 + A_4 B_6 C_2 + A_6 B_2 C_4 - A_6 B_4 C_2 = N_{15}$$
$$A_2 B_5 C_6 - A_2 B_6 C_5 - A_5 B_2 C_6 + A_5 B_6 C_2 + A_6 B_2 C_5 - A_6 B_5 C_2 = N_{16}$$
$$A_3 B_4 C_5 - A_3 B_5 C_4 - A_4 B_3 C_5 + A_4 B_5 C_3 + A_5 B_3 C_4 - A_5 B_4 C_3 = N_{17}$$
$$A_3 B_4 C_6 - A_3 B_6 C_4 - A_4 B_3 C_6 + A_4 B_6 C_3 + A_6 B_3 C_4 - A_6 B_4 C_3 = N_{18}$$
$$A_3 B_5 C_6 - A_3 B_6 C_5 - A_5 B_3 C_6 + A_5 B_6 C_3 + A_6 B_3 C_5 - A_6 B_5 C_3 = N_{19}$$
$$A_4 B_5 C_6 - A_4 B_6 C_5 - A_5 B_4 C_6 + A_5 B_6 C_4 + A_6 B_4 C_5 - A_6 B_5 C_4 = N_{20}$$

und ferner:

$$\frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial y'}{\partial a_2}\frac{\partial y''}{\partial a_3}-\frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial y'}{\partial a_3}\frac{\partial y''}{\partial a_2}-\frac{\partial y}{\partial a_2}\frac{\partial y'}{\partial a_1}\frac{\partial y''}{\partial a_3}+\frac{\partial y}{\partial a_2}\frac{\partial y'}{\partial a_3}\frac{\partial y''}{\partial a_1}+\frac{\partial y}{\partial a_3}\frac{\partial y'}{\partial a_1}\frac{\partial y''}{\partial a_2}-\frac{\partial y}{\partial a_3}\frac{\partial y'}{\partial a_2}\frac{\partial y''}{\partial a_1}=P_1$$

$$\frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial y'}{\partial a_2}\frac{\partial y''}{\partial a_4}-\frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial y'}{\partial a_4}\frac{\partial y''}{\partial a_2}-\frac{\partial y}{\partial a_2}\frac{\partial y'}{\partial a_1}\frac{\partial y''}{\partial a_4}+\frac{\partial y}{\partial a_2}\frac{\partial y'}{\partial a_4}\frac{\partial y''}{\partial a_1}+\frac{\partial y}{\partial a_4}\frac{\partial y'}{\partial a_1}\frac{\partial y''}{\partial a_2}-\frac{\partial y}{\partial a_4}\frac{\partial y'}{\partial a_2}\frac{\partial y''}{\partial a_1}=P_2$$

$$\frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial y'}{\partial a_2}\frac{\partial y''}{\partial a_5}-\frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial y'}{\partial a_5}\frac{\partial y''}{\partial a_2}-\frac{\partial y}{\partial a_2}\frac{\partial y'}{\partial a_1}\frac{\partial y''}{\partial a_5}+\frac{\partial y}{\partial a_2}\frac{\partial y'}{\partial a_5}\frac{\partial y''}{\partial a_1}+\frac{\partial y}{\partial a_5}\frac{\partial y'}{\partial a_1}\frac{\partial y''}{\partial a_2}-\frac{\partial y}{\partial a_5}\frac{\partial y'}{\partial a_2}\frac{\partial y''}{\partial a_1}=P_3$$

$$\frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial y'}{\partial a_2}\frac{\partial y''}{\partial a_6}-\frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial y'}{\partial a_6}\frac{\partial y''}{\partial a_2}-\frac{\partial y}{\partial a_2}\frac{\partial y'}{\partial a_1}\frac{\partial y''}{\partial a_6}+\frac{\partial y}{\partial a_2}\frac{\partial y'}{\partial a_6}\frac{\partial y''}{\partial a_1}+\frac{\partial y}{\partial a_6}\frac{\partial y'}{\partial a_1}\frac{\partial y''}{\partial a_2}-\frac{\partial y}{\partial a_6}\frac{\partial y'}{\partial a_2}\frac{\partial y''}{\partial a_1}=P_4$$

$$\frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial y'}{\partial a_3}\frac{\partial y''}{\partial a_4}-\frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial y'}{\partial a_4}\frac{\partial y''}{\partial a_3}-\frac{\partial y}{\partial a_3}\frac{\partial y'}{\partial a_1}\frac{\partial y''}{\partial a_4}+\frac{\partial y}{\partial a_3}\frac{\partial y'}{\partial a_4}\frac{\partial y''}{\partial a_1}+\frac{\partial y}{\partial a_4}\frac{\partial y'}{\partial a_1}\frac{\partial y''}{\partial a_3}-\frac{\partial y}{\partial a_4}\frac{\partial y'}{\partial a_3}\frac{\partial y''}{\partial a_1}=P_5$$

$$\frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial y'}{\partial a_3}\frac{\partial y''}{\partial a_5}-\frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial y'}{\partial a_5}\frac{\partial y''}{\partial a_3}-\frac{\partial y}{\partial a_3}\frac{\partial y'}{\partial a_1}\frac{\partial y''}{\partial a_5}+\frac{\partial y}{\partial a_3}\frac{\partial y'}{\partial a_5}\frac{\partial y''}{\partial a_1}+\frac{\partial y}{\partial a_5}\frac{\partial y'}{\partial a_1}\frac{\partial y''}{\partial a_3}-\frac{\partial y}{\partial a_5}\frac{\partial y'}{\partial a_3}\frac{\partial y''}{\partial a_1}=P_6$$

$$\frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial y'}{\partial a_3}\frac{\partial y''}{\partial a_6}-\frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial y'}{\partial a_6}\frac{\partial y''}{\partial a_3}-\frac{\partial y}{\partial a_3}\frac{\partial y'}{\partial a_1}\frac{\partial y''}{\partial a_6}+\frac{\partial y}{\partial a_3}\frac{\partial y'}{\partial a_6}\frac{\partial y''}{\partial a_1}+\frac{\partial y}{\partial a_6}\frac{\partial y'}{\partial a_1}\frac{\partial y''}{\partial a_3}-\frac{\partial y}{\partial a_6}\frac{\partial y'}{\partial a_3}\frac{\partial y''}{\partial a_1}=P_7$$

$$\frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial y'}{\partial a_4}\frac{\partial y''}{\partial a_5}-\frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial y'}{\partial a_5}\frac{\partial y''}{\partial a_4}-\frac{\partial y}{\partial a_4}\frac{\partial y'}{\partial a_1}\frac{\partial y''}{\partial a_5}+\frac{\partial y}{\partial a_4}\frac{\partial y'}{\partial a_5}\frac{\partial y''}{\partial a_1}+\frac{\partial y}{\partial a_5}\frac{\partial y'}{\partial a_1}\frac{\partial y''}{\partial a_4}-\frac{\partial y}{\partial a_5}\frac{\partial y'}{\partial a_4}\frac{\partial y''}{\partial a_1}=P_8$$

$$\frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial y'}{\partial a_4}\frac{\partial y''}{\partial a_6}-\frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial y'}{\partial a_6}\frac{\partial y''}{\partial a_4}-\frac{\partial y}{\partial a_4}\frac{\partial y'}{\partial a_1}\frac{\partial y''}{\partial a_6}+\frac{\partial y}{\partial a_4}\frac{\partial y'}{\partial a_6}\frac{\partial y''}{\partial a_1}+\frac{\partial y}{\partial a_6}\frac{\partial y'}{\partial a_1}\frac{\partial y''}{\partial a_4}-\frac{\partial y}{\partial a_6}\frac{\partial y'}{\partial a_4}\frac{\partial y''}{\partial a_1}=P_9$$

$$\frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial y'}{\partial a_5}\frac{\partial y''}{\partial a_6}-\frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial y'}{\partial a_6}\frac{\partial y''}{\partial a_5}-\frac{\partial y}{\partial a_5}\frac{\partial y'}{\partial a_1}\frac{\partial y''}{\partial a_6}+\frac{\partial y}{\partial a_5}\frac{\partial y'}{\partial a_6}\frac{\partial y''}{\partial a_1}+\frac{\partial y}{\partial a_6}\frac{\partial y'}{\partial a_1}\frac{\partial y''}{\partial a_5}-\frac{\partial y}{\partial a_6}\frac{\partial y'}{\partial a_5}\frac{\partial y''}{\partial a_1}=P_{10}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha_2}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_3}\frac{\partial y''}{\partial \alpha_4} - \frac{\partial y}{\partial \alpha_2}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_4}\frac{\partial y''}{\partial \alpha_3} - \frac{\partial y}{\partial \alpha_3}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_2}\frac{\partial y''}{\partial \alpha_4} + \frac{\partial y}{\partial \alpha_3}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_4}\frac{\partial y''}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial y}{\partial \alpha_4}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_2}\frac{\partial y''}{\partial \alpha_3} - \frac{\partial y}{\partial \alpha_4}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_3}\frac{\partial y''}{\partial \alpha_2} = P_{11}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha_2}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_3}\frac{\partial y''}{\partial \alpha_5} - \frac{\partial y}{\partial \alpha_2}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_5}\frac{\partial y''}{\partial \alpha_3} - \frac{\partial y}{\partial \alpha_3}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_2}\frac{\partial y''}{\partial \alpha_5} + \frac{\partial y}{\partial \alpha_3}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_5}\frac{\partial y''}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial y}{\partial \alpha_5}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_2}\frac{\partial y''}{\partial \alpha_3} - \frac{\partial y}{\partial \alpha_5}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_3}\frac{\partial y''}{\partial \alpha_2} = P_{12}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha_2}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_3}\frac{\partial y''}{\partial \alpha_6} - \frac{\partial y}{\partial \alpha_2}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_6}\frac{\partial y''}{\partial \alpha_3} - \frac{\partial y}{\partial \alpha_3}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_2}\frac{\partial y''}{\partial \alpha_6} + \frac{\partial y}{\partial \alpha_3}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_6}\frac{\partial y''}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial y}{\partial \alpha_6}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_2}\frac{\partial y''}{\partial \alpha_3} - \frac{\partial y}{\partial \alpha_6}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_3}\frac{\partial y''}{\partial \alpha_3} = P_{13}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha_2}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_4}\frac{\partial y''}{\partial \alpha_5} - \frac{\partial y}{\partial \alpha_2}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_5}\frac{\partial y''}{\partial \alpha_4} - \frac{\partial y}{\partial \alpha_4}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_2}\frac{\partial y''}{\partial \alpha_5} + \frac{\partial y}{\partial \alpha_4}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_5}\frac{\partial y''}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial y}{\partial \alpha_5}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_2}\frac{\partial y''}{\partial \alpha_4} - \frac{\partial y}{\partial \alpha_5}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_4}\frac{\partial y''}{\partial \alpha_3} = P_{14}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha_2}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_4}\frac{\partial y''}{\partial \alpha_6} - \frac{\partial y}{\partial \alpha_2}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_6}\frac{\partial y''}{\partial \alpha_4} - \frac{\partial y}{\partial \alpha_4}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_2}\frac{\partial y''}{\partial \alpha_6} + \frac{\partial y}{\partial \alpha_4}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_6}\frac{\partial y''}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial y}{\partial \alpha_6}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_2}\frac{\partial y''}{\partial \alpha_4} - \frac{\partial y}{\partial \alpha_6}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_4}\frac{\partial y''}{\partial \alpha_2} = P_{15}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha_2}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_5}\frac{\partial y''}{\partial \alpha_6} - \frac{\partial y}{\partial \alpha_2}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_6}\frac{\partial y''}{\partial \alpha_5} - \frac{\partial y}{\partial \alpha_5}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_2}\frac{\partial y''}{\partial \alpha_6} + \frac{\partial y}{\partial \alpha_5}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_6}\frac{\partial y''}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial y}{\partial \alpha_6}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_2}\frac{\partial y''}{\partial \alpha_5} - \frac{\partial y}{\partial \alpha_6}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_5}\frac{\partial y''}{\partial \alpha_2} = P_{16}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha_3}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_4}\frac{\partial y''}{\partial \alpha_5} - \frac{\partial y}{\partial \alpha_3}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_5}\frac{\partial y''}{\partial \alpha_4} - \frac{\partial y}{\partial \alpha_4}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_3}\frac{\partial y''}{\partial \alpha_5} + \frac{\partial y}{\partial \alpha_4}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_5}\frac{\partial y''}{\partial \alpha_3} + \frac{\partial y}{\partial \alpha_5}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_3}\frac{\partial y''}{\partial \alpha_4} - \frac{\partial y}{\partial \alpha_5}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_4}\frac{\partial y''}{\partial \alpha_2} = P_{17}$$

$$\frac{dy}{\partial \alpha_3}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_4}\frac{\partial y''}{\partial \alpha_6} - \frac{\partial y}{\partial \alpha_3}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_6}\frac{\partial y''}{\partial \alpha_4} - \frac{\partial y}{\partial \alpha_4}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_3}\frac{\partial y''}{\partial \alpha_6} + \frac{\partial y}{\partial \alpha_4}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_6}\frac{\partial y''}{\partial \alpha_3} + \frac{\partial y}{\partial \alpha_6}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_3}\frac{\partial y''}{\partial \alpha_4} - \frac{\partial y}{\partial \alpha_6}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_4}\frac{\partial y''}{\partial \alpha_3} = P_{18}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha_3}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_5}\frac{\partial y''}{\partial \alpha_6} - \frac{\partial y}{\partial \alpha_3}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_6}\frac{\partial y''}{\partial \alpha_5} - \frac{\partial y}{\partial \alpha_5}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_3}\frac{\partial y''}{\partial \alpha_6} + \frac{\partial y}{\partial \alpha_5}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_6}\frac{\partial y''}{\partial \alpha_3} + \frac{\partial y}{\partial \alpha_6}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_3}\frac{\partial y''}{\partial \alpha_5} - \frac{\partial y}{\partial \alpha_6}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_5}\frac{\partial y''}{\partial \alpha_3} = P_{19}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha_4}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_5}\frac{\partial y''}{\partial \alpha_6} - \frac{\partial y}{\partial \alpha_4}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_6}\frac{\partial y''}{\partial \alpha_5} - \frac{\partial y}{\partial \alpha_5}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_4}\frac{\partial y''}{\partial \alpha_6} + \frac{\partial y}{\partial \alpha_5}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_6}\frac{\partial y''}{\partial \alpha_4} + \frac{\partial y}{\partial \alpha_6}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_4}\frac{\partial y''}{\partial \alpha_5} - \frac{\partial y}{\partial \alpha_6}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_5}\frac{\partial y''}{\partial \alpha_4} = P_{20}$$

so ist der gemeinschaftliche Nenner von λ_1, λ_2 und λ_3 folgender:

$$\begin{aligned} & N_1 P_1 + N_2 P_2 + N_3 P_3 + N_4 P_4 + N_5 P_5 + N_6 P_6 + N_7 P_7 + \\ & + N_8 P_8 + N_9 P_9 + N_{10} P_{10} + N_{11} P_{11} + N_{12} P_{12} + N_{13} P_{13} + \\ & + N_{14} P_{14} + N_{15} P_{15} + N_{16} P_{16} + N_{17} P_{17} + N_{18} P_{18} + N_{19} P_{19} + \\ & + N_{20} P_{20}. \end{aligned}$$

Will man den Zähler von λ_1 haben, so müssen in allen den P statt y'' die y''', gesetzt werden; will man den Zähler von λ_2 haben, so muss man im Zähler von λ_1 die y' mit y'' verwechseln, und endlich findet man aus dem Zähler von λ_2 den von λ_3, wenn man statt y, y' setzt. Wir erhalten durch dies in den Ausdrücken für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ zwanzig Constante $N_1, N_2, N_3, \ldots N_{20}$. zwischen denen aber folgende 30 Gleichungen stattfinden:

$$\begin{aligned}
N_1 N_8 - N_2 N_6 + N_3 N_5 &= 0 \\
N_1 N_9 - N_2 N_7 + N_4 N_5 &= 0 \\
N_1 N_{10} - N_3 N_7 + N_4 N_6 &= 0 \\
N_1 N_{14} - N_2 N_{12} + N_3 N_{11} &= 0 \\
N_1 N_{15} - N_2 N_{13} + N_4 N_{11} &= 0 \\
N_1 N_{16} - N_3 N_{13} + N_4 N_{12} &= 0 \\
N_1 N_{17} - N_5 N_{12} + N_6 N_{11} &= 0 \\
N_1 N_{18} - N_5 N_{13} + N_7 N_{11} &= 0 \\
N_1 N_{19} - N_6 N_{13} + N_7 N_{12} &= 0 \\
N_2 N_{10} - N_3 N_9 + N_4 N_8 &= 0 \\
N_2 N_{16} - N_3 N_{15} + N_4 N_{14} &= 0 \\
N_2 N_{17} - N_5 N_{14} + N_8 N_{11} &= 0 \\
N_2 N_{18} - N_5 N_{15} + N_9 N_{11} &= 0 \\
N_2 N_{20} - N_8 N_{15} + N_9 N_{14} &= 0 \\
N_3 N_{17} - N_6 N_{14} + N_8 N_{12} &= 0 \\
N_3 N_{19} - N_6 N_{16} + N_{10} N_{12} &= 0 \\
N_3 N_{20} - N_8 N_{16} + N_{10} N_{14} &= 0 \\
N_4 N_{18} - N_7 N_{15} + N_9 N_{13} &= 0 \\
N_4 N_{19} - N_7 N_{16} + N_{10} N_{13} &= 0 \\
N_4 N_{20} - N_9 N_{16} + N_{10} N_{15} &= 0 \\
N_5 N_{10} - N_6 N_9 + N_7 N_8 &= 0 \\
N_5 N_{19} - N_6 N_{18} + N_7 N_{17} &= 0 \\
N_5 N_{20} - N_8 N_{18} + N_9 N_{17} &= 0 \\
N_6 N_{20} - N_8 N_{19} + N_{10} N_{17} &= 0
\end{aligned}$$

$$N_7\ N_{20} - N_9\ N_{19} + N_{10}\ N_{18} = 0$$
$$N_{11}\ N_{16} - N_{12}\ N_{15} + N_{13}\ N_{14} = 0$$
$$N_{11}\ N_{19} - N_{12}\ N_{18} + N_{13}\ N_{17} = 0$$
$$N_{11}\ N_{20} - N_{14}\ N_{19} + N_{15}\ N_{17} = 0$$
$$N_{12}\ N_{20} - N_{14}\ N_{19} + N_{16}\ N_{17} = 0$$
$$N_{13}\ N_{20} - N_{15}\ N_{19} + N_{16}\ N_{18} = 0$$

Diese dreissig Gleichungen können offenbar nicht lauter verschiedene Gleichungen sein, denn in ihnen kommen ja nur zwanzig Unbekannte vor, man überzeugt sich sehr bald, dass sie alle befriedigt werden für:

$$
\begin{aligned}
N_2 &= \frac{N_1 (N_9 N_{11} - N_5 N_{15})}{N_7 N_{11} - N_5 N_{13}} \\
N_4 &= \frac{N_1 (N_9 N_{13} - N_7 N_{15})}{N_7 N_{11} - N_5 N_{13}} \\
N_6 &= -\frac{N_1 (N_7 N_{17} + N_5 N_{19})}{N_7 N_{11} - N_5 N_{13}} \\
N_8 &= -\frac{N_1 (N_9 N_{11} - N_5 N_{15}) (N_7 N_{17} + N_5 N_{19})}{(N_7 N_{11} - N_5 N_{13})^2} - \frac{N_3 N_5}{N_1} \\
N_{10} &= \frac{N_1 (N_9 N_{13} - N_7 N_{15}) (N_7 N_{17} + N_5 N_{19})}{(N_7 N_{11} - N_5 N_{13})^2} + \frac{N_3 N_7}{N_1} \\
N_{12} &= -\frac{N_1 (N_{13} N_{17} + N_{11} N_{19})}{N_7 N_{11} - N_5 N_{13}} \\
N_{14} &= -\frac{N_1 (N_9 N_{11} - N_5 N_{15}) (N_{13} N_{17} + N_{11} N_{19})}{(N_7 N_{11} - N_5 N_{13})^2} - \frac{N_3 N_{11}}{N_1} \\
N_{16} &= \frac{N_1 (N_9 N_{13} - N_7 N_{15}) (N_{13} N_{17} + N_{11} N_{19})}{(N_7 N_{11} - N_5 N_{13})^2} + \frac{N_3 N_{13}}{N_1} \\
N_{18} &= \frac{N_5 N_{13} - N_7 N_{11}}{N_1} \\
N_{20} &= \frac{N_9 (N_{11} N_{19} + N_{13} N_{17}) - N_{15} (N_7 N_{17} + N_5 N_{19})}{N_7 N_{11} - N_5 N_{13}} - \\
&\quad - \frac{N_3 (N_5 N_{13} - N_7 N_{11})}{N_1^2}
\end{aligned}
\tag{60}
$$

Man kann nun auch hier, die in den früheren Fällen gemachten Schlussbemerkungen wiederholen. Die Werthe für

$$v,\ v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4,\ v_5,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$$

enthalten 20 Constante nämlich:

$$N_1,\ N_2,\ N_3\ \ldots\ N_{18},\ N_{19},\ N_{20}$$

von denen sich aber, so wie es die Gleichungen (60) zeigen, jene mit geraden Zeigern durch die mit ungeraden ausdrücken lassen; da man ferner noch durch irgend einen der übrig bleibenden Coëfficienten Zähler und Nenner dividiren kann, so kann man die Werthe von den v und den λ betrachten als abhängig von neun Constanten, sechs willkürliche Constante dürfen aber nur vorkommen, folglich muss die Gleichung

(48) $$M_1\,(C - 2I - K') - M_2\,D' - D\,(M_3 - M_4) = 0$$

auf drei Relationen zwischen den Constanten N_2, N_4, N_6, N_8 . . N_{20} führen.

§. 12.

Wäre aber $\frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2} = 0$, d. h.

$$V = f(x, y, y', y'') + y''' f(x, y, y' y''),$$

so setze man statt (37) folgenden Ausdruck:

$$\Big\{v\,w^2 + v_1\,w'^2 + v_2\,w''^2 + 2\,v_3\,w\,w' + 2\,v_4\,w\,w'' + 2\,v_5\,w'\,w''\Big\}_{x_1}^{x_2} +$$

$$+ \int_{x_1}^{x_2} P\,(w'' + \lambda\,w' + \mu\,w)^2\,dx$$

somit statt der Gleichungen (11) folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
A &= v' + P\,\mu^2 \\
B &= v'_1 + 2\,v_3 + P\,\lambda^2 \\
C &= v'_2 + 2\,v_5 + P \\
E &= v + v'_3 + P\,\lambda\,\mu \\
F &= v_3 + v'_4 + P\,\mu \\
G &= v_4 \\
H &= v_1 + v_4 + v'_5 + P\,\lambda \\
I &= v_5 \\
K &= v_2
\end{aligned}$$

aus denen sich leicht die Werthe von v_2, v_4, v_5 und P ergeben. Es ist nämlich:

$$\begin{aligned}
v_2 &= K \\
v_4 &= G \\
v_5 &= I \\
P &= C - K' - 2I
\end{aligned}$$

Setzt man diese Werthe in die obigen Gleichungen, so hat man zur Bestimmung von v, v_1, v_3, λ und μ die fünf Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
A &= v' + \mu^2 (C - K' - 2I) \\
B &= v'_1 + 2 v_3 + \lambda^2 (C - K' - 2I) \\
E &= v + v'_3 + \lambda \mu (C - K' - 2I) \\
F &= v_3 + G' + \mu (C - K' - 2I) \\
H &= v_1 + G + I' + \lambda (C - K' - 2I)
\end{aligned}\right\} \quad (61)$$

welche, durch Elimination ein λ und μ auf drei Differentialgleichungen ersten Grades führen.

Wir werden nun genau so, wie bisher die directe Integration dieser Gleichungen umgehen. Ist nämlich das Integral der Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial y} - \left[\frac{\partial V}{\partial y'}\right]' + \left[\frac{\partial V}{\partial y''}\right]'' - \left[\frac{\partial V}{\partial y'''}\right]''' = 0$$

$$y = \varphi(x, a_1, a_2, a_3, a_4)$$

so ist das Integral der Gleichnng:

$$\frac{\partial W}{\partial y} - \left[\frac{\partial W}{\partial y'}\right]' + \left[\frac{\partial W}{\partial y''}\right]'' - \left[\frac{\partial W}{\partial y'''}\right]''' = 0$$

die in entwickelter Gestalt sich so schreiben lässt:

$$w'''' (C - 2I - K') + 2w''' (C' - 2I' - K'') + w'' (-B + C'' + 2F - 3G' + H' - 3I'' - K''') + w' (-B' + 2F' - 3G'' + H'' - I''') + w (A - E' + F'' - G''') = 0$$

$$w = A_1 \frac{\partial y}{\partial a_1} + A_2 \frac{\partial y}{\partial a_2} + A_3 \frac{\partial y}{\partial a_3} + A_4 \frac{\partial y}{\partial a_4}$$

$$w = B_1 \frac{\partial y}{\partial a_1} + B_2 \frac{\partial y}{\partial a_2} + B_3 \frac{\partial y}{\partial a_3} + B_4 \frac{\partial y}{\partial a_4}$$

von denen wir das erste mit u_1, das zweite mit u_2 bezeichnen. Und nun wählen wir, so wie in §. 9, λ und μ dermassen, das $w=u_1$ und $w=u_2$ die particulären Integrale der linearen Differentialgleichung

$$w'' + \lambda w' + \mu = 0$$

werden, dem zu Folge ist daher:

$$\lambda = \frac{u_2 u_1'' - u_1 u_2''}{u_1 u_2' - u_2 u_1'}$$

$$\mu = \frac{u_2'' u_1' - u_1'' u_2'}{u_1 u_2' - u_2 u_1'}$$

Aus den Gleichungen (61) ergeben sich nun:

$$v_1 = H - G - I' - \lambda (C - K' - 2I)$$

$$v_3 = F - G' - \mu (C - K' - 2I)$$

$$v = E - F + G'' + [\mu (C - K' - 2I)]' - \lambda\mu (C - K' - 2I)$$

und jetzt bleibt nur noch zu beweisen übrig, dass die gefundenen Werthe von λ, μ und den v die zwei Gleichungen:

$$A = v' + \mu^2 (C - K' - 2I)$$
$$B = v_1' + 2v_3 + \lambda^2 (C - K' - 2I)$$

identificiren und dabei mit drei willkürlichen Constanten versehen sind. Setzen wir in diesen zwei Gleichungen statt v, v_1 und v_3 ihre Werthe so haben wir:

$$A = E' - F'' + G''' + [\mu (C - K' - 2I)]'' - [\lambda\mu (C - K' - 2I)]' + \mu^2 (C - K' - 2I)$$

$$B = H' - G' - I'' - [\lambda (C - K' - 2I)]' + 2F - 2G' + (\lambda^2 - 2\mu) (C - K' - 2I)$$

oder wenn man diese Ausdrücke entwickelt und ordnet:

$$(62)\quad \begin{aligned} &\mu'' (C - K' - 2I) + 2\mu' (C - K' - 2I)' - (\lambda'\mu + \lambda\mu') (C - K' - 2I) + \mu (C - K' - 2I)'' - \lambda\mu (C - K' - 2I)' + \mu^2 (C - K' - 2I) - A + E' - F'' + G''' = 0 \\ &- \lambda' (C - K' - 2I) - \lambda (C - K' - 2I)' + (\lambda^2 - 2\mu) (C - K' - 2I) - B + H' - 3G' + 2F - I'' = 0 \end{aligned}$$

Macht man von den im §. 9 eingeführten Grössen $M_1, M_2, M_3 \ldots M_8$ Gebrauch, so hat man für μ'' seinen Werth setzend:

$$\mu (C - K' - 2I)'' + (2\mu' - \lambda\mu) (C - K' - 2I)' + \left(\frac{M_7 + M_8}{M_1} + \lambda\mu' - \lambda^2\mu - \mu^2\right) (C - K' - 2I) - A + E' - F'' + G''' = 0$$
$$- \lambda' (C - K' - 2I) - \lambda (C - K' - 2I)' + (\lambda^2 - 2\mu) (C - K' - 2I) - B + H' - 3G' + 2F' - I'' = 0$$

Setzt man ferner statt λ' und μ' ihre Werthe so erhält man:

$$\mu (C - K' - 2I)'' + \left(2\frac{M_6}{M_1} + \lambda\mu\right) (C - K' - 2I)' + \left(\frac{M_7 + M_8}{M_1} + \lambda \frac{M_6}{M_1} + \mu^2\right) (C - K' - 2I) - A + E' - F'' + G''' = 0$$
$$- \lambda (C - K' - 2I)' + \left(\frac{M_3}{M_1} - \mu\right) (C - K' - 2I) - B + H' - 3G' + 2F' - I'' = 0$$

und endlich noch für λ und μ ihre Werthe, so erhält man:

$$(63)\quad \begin{aligned} &M_1 M_4 (C - K' - 2I)'' + (2M_1 M_6 - M_2 M_4) (C - K' - 2I)' + (M_1 M_7 + M_1 M_8 - M_2 M_6 + M_4^2) (C - K' - 2I) + M_1^2 (- A + E' - F'' + G''') = 0 \\ &M_2 (C - K' - 2I)' + (M_3 - M_4) (C - K' - 2I) + M_1 (- B + H' - 3G' + 2F' - I'') = 0 \end{aligned}$$

Nun folgt aus den beiden identischen Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&u_1'''' (C-2I-K') + 2u_1''' (C'-2I'-K'') + u_1'' (-B+\\
&+C''+2F-3G'+H'-3I''-K''') + u_1' (-B'+\\
&+2F'-3G''+H''-I''') + u_1 (A-E'+F''-G''') = 0 \qquad (64)\\
&u_2'''' (C-2I-K') + 2u_2''' (C'-2I'-K'') + u_2'' (-B+\\
&+C''+2F-3G'+H'-3I''-K''') + u_2' (-B'+\\
&+2F'-3G''+H''-I''') + u_2 (A-E'+F''-G''') = 0
\end{aligned}$$

wenn man die erste mit u_2' die zweite mit u_1' multiplicirt und dann von einander subtrahirt:

$$\begin{aligned}
&-M_7 (C-2I-K') - 2M_6 (C'-2I'-K'') - M_4 (-B+C''+\\
&+2F-3G'+H'-3I''-K''') + M_1 (A-E'+F''-G''') = 0
\end{aligned}$$

Nimmt man jetzt den Werth, den diese Gleichung für $A-E'+F''-G'''$ gibt, und setzt ihn in die erste der Gleichungen (63), so erhält man statt derselben:

$$\begin{aligned}
&-M_2 M_4 (C-2I-K')' + (M_1 M_8 - M_2 M_6 + M_4^2)(C-2I-\\
&\qquad -K') - M_1 M_4 (-B+2F-3G'+H'-I'') = 0
\end{aligned}$$

und wenn man statt $M_1 M_8 - M_2 M_6$ seinen Werth $-M_3 M_4$ setzt:

$$\begin{aligned}
&-M_4 [M_2 (C-2I-K')' + (M_3-M_4)(C-2I-K') +\\
&\qquad + M_1 (-B+2F-3G'+H'-I')] = 0
\end{aligned}$$

woraus man sieht, dass die beiden Gleichungen (63) befriedigt werden, wenn nur die zweite von ihnen befriedigt ist.

Verfährt man nun weiter, wie im §. 9, differenzirt man nämlich die letztgenannte Gleichung nach x, so erhält man nach einigen Reductionen:

$$\begin{aligned}
&M_2 (C-2I-K')'' + 2M_3 (C-2I-K')' + M_5 (C-2I-K') +\\
&+ M_1 (-B'+2F'-3G''+H''-I''') + M_2 (-B+\\
&\qquad +2F-3G'+H'-I') = 0
\end{aligned}$$

welche identisch stattfindet, denn sie ist eine unmittelbare Folge der zwei identischen Gleichungen (64) und geht aus ihnen hervor, wenn man die erste mit u_2 die zweite mit $-u_1$ multiplicirt und dann beide addirt. Ist aber die jetzt eben aufgestellte Gleichung identisch Null, so muss ihr Integrale, d. i.

$$\begin{aligned}
&M_2 (C-2I-K')' + (M_3-M_4)(C-2I-K') + M_1 (-B+\\
&\qquad +2F-3G'+H'-I')
\end{aligned}$$

gleich einer Constanten sein; ist nun diese Constante gleich Null, so sind die Gleichungen (63) erfüllt, und somit die gefundenen Werthe von λ, μ, v, v_1, v_2, v_3, v_4 und v_5 die richtigen.

Man hat somit:

$$\int_{x_1}^{x_2} (Aw^2 + Bw'^2 + Cw''^2 + 2Eww' + 2Fww'' + 2Gww''' + \\ + 2Hw'w'' + 2Iw'w''' + 2Kw''w''') \, dx =$$

$$= \left\{ v\,w^2 + v_1\,w'^2 + v_2\,w''^2 + 2v_3\,ww' + 2v_4\,ww'' + 2v_5\,w'w'' \right\}_{x_1}^{x_2} + \\ + \int_{x_1}^{x_2} P\,(w'' + \lambda\,w' + \mu\,w)^2\,dx$$

wo v, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, λ und μ die früher angegebenen Werthe haben, welche genau so wie in §. 9 mit den sechs Constanten C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 versehen sind, zwischen denen die zwei Bedingungsgleichungen:

$$C_1\,C_6 - C_2\,C_5 + C_3\,C_4 = 0$$

$$M_2\,(C - 2I - K')' + (M_3 - M_4)\,(C - 2I - K') + M_1\,(-B + \\ + 2F - 3G' + H' - I'') = 0$$

stattfinden; da ausserdem blos die Verhältnisse der Constanten in den Werthen der gefundenen Unbekannten eintreten, so haben sie die nothwendige Allgemeinheit. Die Kriterien sind daher folgende:

$C - K' - 2J$ muss für alle Werthe innerhalb der Integrationsgrenzen stets dasselbe Zeichen beibehalten, und die drei in der Rechnung eintretenden willkürlichen Constanten müssen so gewählt werden können, dass für keinen zwischen x_1 und x_2 liegenden Werth von x der gemeinschaftliche Nenner von λ und μ gleich Null wird.

§. 13.

Ist aber nebstdem, dass $D = 0$ ist, noch $C - K' - 2J = 0$, so lassen sich die Glieder der zweiten Ordnung in die Form:

$$\left\{ v\,w^2 + v_1\,w'^2 + v_2\,w''^2 + 2v_3\,ww' + 2v_4\,ww'' + 2v_5\,w'w'' \right\}_{x_1}^{x_2} + \\ + \int_{x_1}^{x_2} Q\,(w' + \lambda\,w)^2\,dx$$

bringen, wo die hier eintretenden Unbekannten aus folgenden Gleichungen zu bestimmen sind:

$$\begin{aligned}
A &= v' + Q\lambda^2 \\
B &= v_1' + 2v_3 + Q \\
C &= v_2' + 2v_5 \\
E &= v + v_3' + Q\lambda \\
F &= v_3 + v_4' \\
G &= v_4 \\
H &= v_1 + v_4 + v_5' \\
I &= v_5 \\
K &= v_2
\end{aligned}$$

Aus ihnen ergeben sich:

$$\begin{aligned}
v_2 &= K \\
v_4 &= G \\
v_5 &= I \\
v_1 &= H - G - I' \\
v_3 &= F - G' \\
Q &= B - 2F + 3G' - H' + I''
\end{aligned}$$

und die zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned}
A &= v' + \lambda^2 (B - 2F + 3G' - H' + I'') \\
E &= v + F' - G'' + \lambda (B - 2F + 3G' - H' + I'')
\end{aligned}$$

welche zur Bestimmung von λ und v dienen.

Die Gleichung (38) ist in diesem Falle:

$$w'' (- B + 2F - 3G' + H' - I'') + w' (- B' + 2F - 3G'' + \\ + H'' - I''') + w (A - E' + F'' - G''') = 0$$

und hat zum Integrale:

$$w = C_1 \frac{\partial y}{\partial a_1} + C_2 \frac{\partial y}{\partial a_2}$$

unter a_1 und a_2 die Constanten verstanden, die im Integrale der Gleichung:

$$\frac{\partial V}{\partial y} - \left[\frac{\partial V}{\partial y'}\right]' + \left[\frac{\partial V}{\partial y''}\right]'' - \left[\frac{\partial V}{\partial y'''}\right]''' = 0$$

eintreten.

Setzt man, wie im §. 7

$$\lambda = -\frac{u'}{u}$$

unter u den Ausdruck $C_1 \frac{\partial y}{\partial a_1} + C_2 \frac{\partial y}{\partial a_2}$ verstanden, so hat man für v folgenden Werth:

$$v = E - F' + G'' + \frac{u'}{u}(B - 2F + 3G' - H' + I'')$$

und wenn alles dies richtig ist, muss folgende Gleichung identisch sein:

$$A = E' - F'' + G''' + \frac{u'}{u}(B' - 2F' + 3G'' - H'' + I''') + \\ + (B - 2F + 3G' - H' + I'')\frac{u\,u'' - u'^2}{u^2} + \frac{u'^2}{u^2}(B - 2F + \\ + 3G' - H' + I'')$$

Ordnet man sie, so erhält man:

$$u''(-B + 2F - 3G' + H' - I'') + u'(-B' + 2F' - 3G'' + \\ + H'' - I''') + u(A - E' + F'' - G''') = 0$$

was wirklich identisch ist.

In diesem Falle muss also, damit ein Maximum oder Minimum eintrete, $B - 2F + 3G' - H' + J''$ innerhalb der Integrationsgrenzen stets dasselbe Zeichen beibehalten, und ein solcher Werth von m vorhanden sein, der es unmöglich macht, dass innerhalb derselben Grenzen $\frac{\partial y}{\partial a_1} + m \frac{\partial y}{\partial a_2}$ gleich Null wird.

Wäre auch noch $B - 2F + 3G' - H' + J'' = 0$, so lassen sich die Glieder der zweiten Ordnung so darstellen:

$$\Big\{ v\,w^2 + v_1\,w'^2 + v_2\,w''^2 + 2v_3\,ww' + 2v_4\,ww'' + 2v_5\,w'w'' \Big\}_{x_1}^{x_2} + \\ + \int_{x_1}^{x_2} (A - E' + F'' - G''')\,w^2\,dx$$

wo

$$\begin{aligned} v &= E - F' + G'' \\ v_1 &= H - G - J' \\ v_2 &= K \\ v_3 &= F - G' \\ v_4 &= G \\ v_5 &= J \end{aligned}$$

ist, von deren Richtigkeit man sich leicht überzeugen kann. Zum Bestehen eines Maximums oder Minimums genügt es daher, dass $A - E' + F'' - G'''$ für alle Werthe von x innerhalb den Integrationsgrenzen einerlei Zeichen habe.

Wäre endlich auch $A - E' + F'' - G''' = 0$, so müsste man, da $V dx$ ein vollständiges Differential ist, die Untersuchung auf andere Art führen.

SITZUNG VOM 23. MAI 1854.

Eingesendete Abhandlungen.

Osservazioni della II. Cometa dell' Anno 1854 apparsa verso la fine di Marzo, visibile ad occhio nudo, fatte nell' I. R. Osservatorio di Padova.

(Communicazione Accademica del **Prof. Giovanni Santini.**)

Nella sera 31 di Marzo, mentre si disponevano gli Astronomi alle osservazioni dei due nuovi pianeti Bellona, ed Anfitrite recentemente scoperti a Londra, e Parigi, si presentò alla loro vista una Cometa risplendente con magnifica coda opposta al Sole protraentesi per circa 6 in 8 gradi nella costellazione dei pesci, già molto prossima al tramonto. Osservata con un cannocchiale vi si riscontrava un nucleo ben contornato, splendente, senza quel capillizio, circondante per lo più le comete che ne rende le osservazioni difficili, ed incerte; la sua coda era uniforme non divisa in due rami, come spesso si osserva, rara, luminosa, e lasciava travedere agevolmente le minute stelle, fra le quali brillava con uno splendore direbbesi oltre il consueto la 109 dei pesci (533 del Catalogo dell' associazione Brittannica). La sua lunghezza e splendore si illanguidì nelle sere consecutive al crescere del chiarore della Luna, che pervenne alla prima quadratura ai 5 di Aprile; ma il nucleo si mantenne sempre splendente, e facilmente visibile col cannocchiale anche nella forte luce crepuscolare. La sua *AR* andava rapidamente crescendo, mentre diminuendo pure la declinazione con rapidità si avvicinava continuamente all' Equatore, e mostrava che non sarebbesi